Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 10/1/2012 – ore 9

Esercizio 1

(i) $|S| = 6^4 = 1296$.
(ii) Essendo

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \binom{4}{2}}{6^4} = \frac{720}{1296} = \frac{5}{9}, \qquad P(B) = \frac{3^4}{6^4} = \frac{81}{1296} = \frac{1}{16},$$

si ha che

$$P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \binom{4}{2}}{6^4} = \frac{1}{36} \quad \neq \quad \frac{5}{144} = P(A) \cdot P(B),$$

e quindi gli eventi A e B non sono indipendenti.
(iii) Posto $C = \{\text{nel vettore c'è una coppia di 1}\}$, si ha che

$$P(C \,|\, A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{5/54}{5/9} = \frac{1}{6},$$

essendo

$$P(C \cap A) = \frac{5 \cdot 4 \cdot \binom{4}{2}}{6^4} = \frac{5}{54}.$$

Esercizio 2

(i) Risulta $f(x) \geq 0$, $x \in (0,1)$, per $c > 0$. Inoltre deve essere

$$1 = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = c \int_0^1 (x - x^2) \mathrm{d}x = c \cdot \frac{1}{6},$$

da cui si ricava $c = 6$.
(ii) Si ha che

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y = 3x^2 - 2x^3 & 0 \leq x < 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

(iii) Per $n \geq 1$ risulta

$$E(X^n) = 6 \int_0^1 (x^{n+1} - x^{n+2}) \mathrm{d}x = \frac{6}{(n+2)(n+3)}.$$

(iv)

$$Cov(X, Y) = Cov(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{20}.$$

Esercizio 3

(i) Distribuzioni congiunta e marginali sono date da:

$x \backslash y$	0	1	$p_X(x)$
0	26/36	4/36	5/6
1	4/36	2/36	1/6
$p_Y(y)$	5/6	1/6	1

(ii) Si ha $p(0,1) = 4/36 \neq p_X(0)\, p_Y(1) = 5/36$, quindi X e Y non sono indipendenti; inoltre X e Y sono identicamente distribuite.

(iii) Risulta

$$E(XY) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, \qquad E(X) = E(Y) = \frac{1}{6},$$

e pertanto

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{18} - \frac{1}{36} = \frac{1}{36}.$$

Essendo inoltre

$$Var(X) = Var(Y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36},$$

si ottiene infine

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 26/1/2012 – ore 12

Esercizio 1

(i) Consideriamo gli eventi $F_k = \{$nei due lanci si ottiene testa k volte$\}$, $(k = 0, 1, 2)$ e A=$\{$nelle due estrazioni dall'urna si ottengono una biglia rossa ed una bianca$\}$. Risulta

$$P(A) = \sum_{k=0}^{2} P(A \mid F_k)P(F_k) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\binom{2+k}{1}\binom{4-k}{1}}{\binom{6}{2}} \cdot \binom{2}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{2-k}$$
$$= \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{9}{16} + \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{6}{16} + \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{1}{16} = \frac{67}{120}.$$

(ii) Si ha che

$$P(F_k \mid A) = \frac{P(A \mid F_k)P(F_k)}{\sum_{k=0}^{2} P(A \mid F_k)P(F_k)} = \begin{cases} \frac{(8\cdot 9)/(15\cdot 16)}{67/120} = 36/67 & k = 0, \\ \frac{(9\cdot 6)/(15\cdot 16)}{67/120} = 27/67 & k = 1, \\ \frac{(8\cdot 1)/(15\cdot 16)}{67/120} = 4/67 & k = 2. \end{cases}$$

Esercizio 2

(i) La variabile X è una variabile geometrica con parametro $p = \frac{1}{2}$. Si ha pertanto che

$$P(X = n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(ii) Essendo $P(X \geq n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1}$, risulta

$$P(X \geq n) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow n = 3.$$

(iii) Risulta

$$P(X \geq 5 \mid X \geq 3) = \frac{P(X \geq 5)}{P(X \geq 3)} = \frac{(1/2)^4}{(1/2)^2} = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3

(i) Essendo X e Y variabili aleatorie indipendenti, la funzione di distribuzione congiunta è data dal prodotto delle funzioni di distribuzioni marginali di X ed Y

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{x-1}{2}\right) \cdot \frac{y+1}{2} & x \in \mathbb{R}, -1 < y < 1, \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(ii) Risulta

$$P(X \leq 1, Y \leq 1/2 \,|\, X \leq 0, Y \leq 1) = \frac{P(X \leq 0, Y \leq 1/2)}{P(X \leq 0, Y \leq 1)} = \frac{F_{X,Y}(0, 1/2)}{F_{X,Y}(0, 1)} = \frac{3}{4}.$$

(iii)

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 1 + 0 = 1.$$

Inoltre, essendo X e Y indipendenti,

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) = 4 + \frac{4}{12} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 29/2/2012

Esercizio 1 (i) Lo spazio campionario ha cardinalità 10 in quanto la scelta a caso di 2 nodi da un insieme di 5 nodi si può effettuare in $\binom{5}{2} = 10$ modi.
(ii) Si ha:

$$P(A) = \frac{7}{10}, \quad P(B) = \frac{6}{10}, \quad P(C) = \frac{6}{10}, \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{10},$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{10}, \quad P(A \cap C) = \frac{5}{10}, \quad P(B \cap C) = \frac{4}{10},$$

quindi non è soddisfatta nessuna delle 4 uguaglianze che riguardano l'indipendenza dei 3 eventi.

Esercizio 2 (i) Risulta $c = 1/2$, in modo che $F(x)$ sia continua in $x = 1$.
(ii) La densità di probabilità di X è: $f(x) = x + 1/2$, per $0 < x < 1$.
(iii) I momenti di X sono:

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

(iv) Si ha $Cov(X, Y) = Cov(X, 2 - X^2) = E(2X - X^3) - E(X)\,E(2 - X^2)$, quindi

$$Cov(X, Y) = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6} - \frac{13}{40} - \frac{7}{12} \cdot \frac{19}{12} = -\frac{59}{720} = -0{,}081.$$

Esercizio 3 (i) Risulta:

$x\backslash y$	1	2	3	4	5	$p_X(x)$
0	1/25	0	3/25	0	5/25	9/25
1	0	2/25	2/25	4/25	4/25	12/25
2	0	1/25	0	3/25	0	4/25
$p_Y(y)$	1/25	3/25	5/25	7/25	9/25	1

La distribuzione di probabilità di X è di tipo binomiale, essendo $p_X(x) = \binom{2}{x}(2/5)^x(3/5)^{2-x}$ per $x = 0, 1, 2$.
(ii) Poiché

$$E(X) = \frac{4}{5} = 0{,}8, \qquad Var(X) = \frac{12}{25} = 0{,}48,$$

$$E(Y) = \frac{1}{25} + \frac{6}{25} + \frac{15}{25} + \frac{28}{25} + \frac{45}{25} = \frac{95}{25} = \frac{19}{5} = 3{,}8$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{25} + \frac{12}{25} + \frac{45}{25} + \frac{112}{25} + \frac{225}{25} = \frac{395}{25} = \frac{79}{5} = 15{,}8$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 15{,}8 - (3{,}8)^2 = \frac{34}{25} = 1{,}36$$

$$E(XY) = \frac{4}{25} + \frac{6}{25} + \frac{16}{25} + \frac{20}{25} + \frac{4}{25} + \frac{24}{25} = \frac{74}{25} = 2{,}96$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2{,}8 - 0{,}8 \cdot 3{,}8 = \frac{74}{25} - \frac{4}{5} \cdot \frac{19}{5} = -\frac{2}{25} = -0{,}08$$

si ha

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = \frac{12}{25} + \frac{34}{25} + 2 \cdot \frac{2}{25} = \frac{50}{25} = 2.$$

(iii) Pertanto

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-\frac{2}{25}}{\sqrt{\frac{12}{25} \cdot \frac{34}{25}}} = \frac{-2}{\sqrt{408}} = \frac{-1}{\sqrt{102}} = -0{,}099.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 19/4/2012

Esercizio 1 Consideriamo gli eventi $A_k = \{$lo studente è iscritto al k-esimo anno di corso$\}$ $(k = 1, 2, 3)$ ed L=$\{$lo studente conosce almeno un linguaggio di programmazione$\}$. Risulta

$$P(A_k) = \begin{cases} 2/12 = 1/6 & k = 1, \\ 4/12 = 1/3 & k = 2, \\ 6/12 = 1/2 & k = 3, \end{cases}$$

e

$$P(L \,|\, A_k) = \frac{k}{3}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Si ha quindi che

$$P(A_k \,|\, L) = \frac{P(L \,|\, A_k)P(A_k)}{\sum_{j=1}^{3} P(L \,|\, A_j)P(A_j)} = \frac{kP(A_k)}{\sum_{j=1}^{3} jP(A_j)} \begin{cases} \frac{1/6}{14/6} = 1/14 & k = 1, \\ \frac{2/3}{14/6} = 2/7 & k = 2, \\ \frac{3/2}{14/6} = 9/14 & k = 3. \end{cases}$$

Esercizio 2 (i) Risulta:

$x \backslash y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	1/8	0	0	0	1/8
1	0	1/8	1/8	1/8	3/8
2	0	2/8	1/8	0	3/8
3	0	1/8	0	0	1/8
$p_Y(y)$	1/8	4/8	2/8	1/8	1

(ii) Si ha $p(1, 0) = 0 \neq p_X(1)\, p_Y(0) = 3/64$, quindi X e Y non sono indipendenti;

(iii) La distribuzione di probabilità di X è di tipo binomiale di parametri $(3, 1/2)$ e quindi

$$E(X) = \frac{3}{2}, \qquad Var(X) = \frac{3}{4}.$$

Inoltre

$$E(Y) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}, \quad E(Y^2) = \frac{4}{8} + \frac{8}{8} + \frac{9}{8} = \frac{21}{8},$$

e quindi

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{21}{8} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{47}{64}.$$

Essendo poi

$$E(XY) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{17}{8},$$

risulta

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{17}{8} - \frac{3}{2}\cdot\frac{11}{8} = \frac{1}{16}.$$

Si ottiene infine

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{1/16}{\sqrt{141}/16} = \frac{1}{\sqrt{141}} = 0{,}0842.$$

Esercizio 3 (i) Se X è normale, di valore medio $\mu = -0{,}5$ e varianza $\sigma^2 = 4$, si ha che $Z = (X + 0{,}5)/2$ è normale standard; pertanto:

$$\begin{aligned} P(-2 < X < 1) &= P(-0{,}75 < Z < 0{,}75) = \Phi(0{,}75) - \Phi(-0{,}75) \\ &= 2\Phi(0{,}75) - 1 = 2\cdot 0{,}7734 - 1 = 0{,}5468, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X^2 < 4) &= P(-2 < X < 2) = P(-0{,}75 < Z < 1{,}25) \\ &= \Phi(1{,}25) - \Phi(-0{,}75) = \Phi(1{,}25) + \Phi(0{,}75) - 1 = 0{,}6678, \end{aligned}$$

e quindi

$$P(-2 < X < 1 \,|\, X^2 < 4) = \frac{P(-2 < X < 1)}{P(X^2 < 4)} = \frac{0{,}5468}{0{,}6678} = 0{,}8188.$$

(ii) Se X è esponenziale di valore medio $\mu = 1$ si ha che

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Pertanto:

$$P(-2 < X < 1) = F_X(1) - F_X(-2) = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 0{,}632,$$

$$P(X^2 < 4) = P(-2 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-2) = 1 - \mathrm{e}^{-2} = 0{,}865,$$

e quindi

$$P(-2 < X < 1 \,|\, X^2 < 4) = \frac{P(-2 < X < 1)}{P(X^2 < 4)} = \frac{0{,}632}{0{,}865} = 0{,}730.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 19/6/2012 – ore 9

Esercizio 1

(i) Considerato l'evento $A = \{$tra le biglie blu e rossa è disposta esattamente una biglia$\}$, risulta

$$P(A) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}.$$

(ii) Posto $B = \{$tra le biglie blu e rossa è disposta almeno una biglia$\}$, si ha che

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{4! \cdot 2}{5!} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Pertanto

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2

(i) Risulta

$$\begin{aligned}
P(X=3) &= \frac{13 \cdot \binom{4}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{1}{425}, \\
P(X=2) &= \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot 4}{\binom{52}{3}} = \frac{72}{425}, \\
P(X=0) &= \frac{\binom{13}{3}\, 4^3}{\binom{52}{3}} = \frac{352}{425} = 1 - \left(P(X=2) + P(X=3)\right).
\end{aligned}$$

(ii) Si ha che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 352/425 & 0 \le x < 2, \\ (352+72)/425 = 424/425 & 2 \le x < 3, \\ 1 & x \ge 3. \end{cases}$$

(iii)

$$E(X) = 2 \cdot \frac{72}{425} + 3 \cdot \frac{1}{425} = \frac{147}{425}, \quad E(X^2) = 4 \cdot \frac{72}{425} + 9 \cdot \frac{1}{425} = \frac{297}{425},$$

e quindi

$$Var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{297}{425} - \left(\frac{147}{425}\right)^2 \approx 0{,}58.$$

Esercizio 3

(i) Per la condizione di normalizzazione deve essere

$$1 = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=-1}^{1} p_{X,Y}(x,y) = c \cdot 5,$$

da cui segue $c = 1/5$.

(ii) Risulta

$$p_X(x) = \sum_{y=-1}^{1} p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{5} \sum_{y=-1}^{1} (x^2 + x|y|) = \frac{x}{5}\,(3x+2), \quad x = 0, 1,$$

e

$$p_y(y) = \sum_{x=0}^{1} p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{5} \sum_{x=0}^{1} (x^2 + x|y|) = \frac{1}{5}(1+|y|), \quad y = -1, 0, 1.$$

(iii) Per $x = 0, 1$ ed $y = -1, 0, 1$ si ha che

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_y(y),$$

e quindi X e Y sono indipendenti.

(iv)

$$E(X/(Y+2)) = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=-1}^{1} \frac{x}{y+2}\, p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{5} \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=-1}^{1} \frac{x}{y+2}\,(x^2 + x|y|) = \frac{19}{30}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 05/07/2012 – ore 9

Esercizio 1

Considerato l'evento $A_k = \{\text{il } k\text{-esimo bit è trasmesso in modo corretto}\}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, dai dati del problema risulta

$$P(A_k) = 1 - \frac{k}{6} = \begin{cases} \frac{5}{6} & k = 1, \\ \frac{4}{6} & k = 2, \\ \frac{3}{6} & k = 3, \\ \frac{2}{6} & k = 4. \end{cases}$$

(i) Posto $B = \{\text{si ha almeno un errore sulla sequenza di 4 bit}\}$, risulta

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = 1 - \frac{5}{6}\frac{4}{6}\frac{3}{6}\frac{2}{6} = 1 - \frac{5}{54} = \frac{49}{54}. \end{aligned}$$

(ii) Posto $C = \{\text{si ha esattamente un errore sulla sequenza di 4 bit}\}$, risulta

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) \\ &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4) = \frac{1}{6}\frac{4}{6}\frac{3}{6}\frac{2}{6} + \frac{5}{6}\frac{2}{6}\frac{3}{6}\frac{2}{6} + \frac{5}{6}\frac{4}{6}\frac{3}{6}\frac{2}{6} + \frac{5}{6}\frac{4}{6}\frac{3}{6}\frac{4}{6} = \frac{37}{108}. \end{aligned}$$

(iii) Risulta

$$\begin{aligned} P(B \mid A_1 \cap A_2) &= \frac{P(B \cap A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cap A_2)} = P(\bar{A}_3 \cap A_4) + P(A_3 \cap \bar{A}_4) + P(\bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \\ &= \frac{3}{6}\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\frac{4}{6} + \frac{3}{6}\frac{4}{6} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Esercizio 2

(i) Dovendo essere

$$1 = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \right] \Big|_a^{+\infty} = \frac{1}{a},$$

si ricava $a = 1$.

(ii) Si ha che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ \int_1^x \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y = 1 - \frac{1}{x} & x \geq 1. \end{cases}$$

(iii) Essendo, per $n \geq 0$,

$$P(2^n < X \leq 2^{n+1}) = F_X(2^{n+1}) - F_X(2^n) = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}},$$

si ha che

$$P(2^n < X < 2^{n+1}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow n = 1.$$

(iv) Posto $Y = 1/X$, si ha che

$$E(Y) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$E(Y^2) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$

e quindi

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Pertanto

$$P\left(\left|Y - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}\right) = P\left(\left|Y - E(Y)\right| \le \frac{1}{2}\right) \ge 1 - \frac{Var(Y)}{1/4} = \frac{2}{3},$$

avendo fatto uso della disuguaglianza di Chebyshev.

Esercizio 3 (i) Risulta:

$x\backslash y$	0	1	$p_X(x)$
0	0	2/16	2/16
1	2/16	4/16	6/16
2	2/16	4/16	6/16
3	1/16	1/16	2/16
$p_Y(y)$	5/16	11/16	1

(ii) Si ha

$$E(X) = \frac{6}{16} + \frac{12}{16} + \frac{6}{16} = \frac{3}{2}, \qquad E(Y) = \frac{11}{16},$$

e quindi $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{35}{16}$. Inoltre

$$E(X \cdot Y) = \frac{4}{16} + \frac{8}{16} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}.$$

(iii) Risulta

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y) = \frac{15}{16} - \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{16} = -\frac{3}{32},$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{6}{16} + \frac{24}{16} + \frac{18}{16} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{11}{16} - \left(\frac{11}{16}\right)^2 = \frac{55}{256}.$$

Si ottiene infine

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = -\frac{3/32}{\sqrt{165/1024}} = -\sqrt{\frac{3}{55}} = -0{,}234.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 10/9/2012

Esercizio 1 (i) Lo spazio campionario ha cardinalità 10 in quanto la scelta a caso di 2 nodi da un insieme di 5 nodi si può effettuare in $\binom{5}{2} = 10$ modi.
(ii) Si ha:

$$P(A) = \frac{7}{10}, \quad P(B) = \frac{4}{10}, \quad P(C) = \frac{9}{10}, \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{10},$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{10}, \quad P(A \cap C) = \frac{6}{10}, \quad P(B \cap C) = \frac{4}{10},$$

quindi non è soddisfatta nessuna delle 4 uguaglianze che riguardano l'indipendenza dei 3 eventi.

Esercizio 2 (i) La densità di probabilità di X è: $f(x) = 2(1-x)$, per $0 < x < 1$.
(ii) I momenti di X sono:

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, f(x)\, dx = 2\int_0^1 x^n(1-x)dx$$
$$= 2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)}\right]_0^1 = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Risulta quindi

$$E(X) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad E(X^2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6},$$

e pertanto

$$Var(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}, \qquad \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Si ha

$$P(E(X) - \sqrt{Var(X)} \le X \le E(X) + \sqrt{Var(X)}) = P\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \le X \le \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$
$$= P(0{,}0976 \le X \le 0{,}569) = F(0{,}569) - F(0{,}0976)$$
$$= 1 - (1 - 0{,}569)^2 - 1 + (1 - 0{,}0976)^2 = 0{,}6285.$$

(iii) Si ha

$$Cov(X, \alpha X^2) = \alpha\left(E(X^3) - E(X)E(X^2)\right) = \alpha\left(\frac{2}{20} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\right) = \alpha \cdot \frac{2}{45},$$

e quindi $Cov(X, \alpha X^2) \ge 0$ per $\alpha \ge 0$.

Esercizio 3 (i) Risulta:

$x \backslash y$	0	1	$p_X(x)$
0	0	1/16	1/16
1	2/16	2/16	4/16
2	6/16	0	6/16
3	2/16	2/16	4/16
4	0	1/16	1/16
$p_Y(y)$	10/16	6/16	1

La distribuzione di probabilità di X è di tipo binomiale, essendo $p_X(x) = \binom{4}{x}(1/2)^x(1/2)^{4-x}$, per $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

(ii) Si ha

$$p(0,0) = 0 \neq p_X(0)\, p_Y(0) = \frac{1}{16} \cdot \frac{10}{16},$$

quindi X e Y non sono indipendenti;

(iii) Poiché

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \qquad Var(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$E(Y) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}, \qquad Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{6}{16} - \frac{9}{64} = \frac{15}{64},$$

e

$$E(XY) = \frac{2}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4},$$

si ha infine

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{3/4 - 2 \cdot 3/8}{\sqrt{15/64}} = 0$$