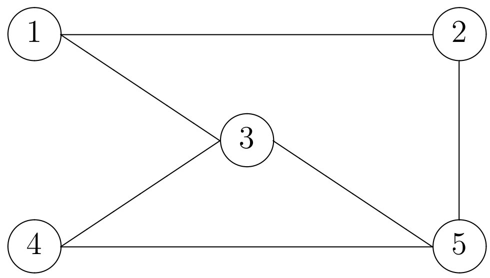
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 7/1/2010 – ore 9

Esercizio 1 Si effettuano 3 estrazioni a caso da una lista che contiene 4 dati, di cui uno è errato. Sia $A = \{$in al più una delle prime 2 estrazioni si estrae il dato errato$\}$, e sia $B = \{$nelle ultime 2 estrazioni si estrae almeno una volta il dato errato$\}$.

Stabilire se A e B sono eventi indipendenti
(i) nel caso di estrazioni con reinserimento.
(ii) nel caso di estrazioni senza reinserimento.

Esercizio 2 Un esperimento consiste nello scegliere a caso un arco del seguente grafo:



Siano X e Y le variabili aleatorie che descrivono rispettivamente il minimo e il massimo tra i numeri dei 2 vertici dell'arco scelto a caso.
(i) Determinare la densità discreta congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare la covarianza di (X, Y).

Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, con X normale di media -1 e varianza 4, e Y uniforme di media 6 e varianza 12.
(i) Calcolare $P(\{X \le 2\} \cup \{Y \le 2\})$.
(ii) Determinare $P(X \le 1, Y \le 1 \,|\, X \le 2, Y \le 2)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Fisciano, 7/1/2010 – ore 11

Esercizio 1 Un esperimento consiste nello scegliere a caso una sequenza dall'elenco delle sequenze booleane di lunghezza 5 aventi 2 bit pari a **1** e 3 bit pari a **0**. Sia $A = \{$tra i primi 2 bit della sequenza, almeno un bit è pari a $\mathbf{0}\}$, e sia $B = \{$i 3 bit della sequenza pari a $\mathbf{0}$ sono tra loro adiacenti$\}$.
(i) Calcolare $P(A \cup B)$, $P(A \,|\, \overline{B})$, $P(\overline{A} \,|\, B)$.
(ii) Stabilire se A e B sono eventi indipendenti.

Esercizio 2 Un canale di trasmissione è soggetto ad errore, nel senso che ogni volta che si trasmette un numero (indipendentemente dalle altre trasmissioni), questo si riceve modificato con la probabilità indicata nella seguente tabella:

numero trasmesso	numero ricevuto	probabilità
n	$n-1$	1/8
n	n	3/4
n	$n+1$	1/8

Supponendo di trasmettere la sequenza $(1, 2, 3)$, sia X la variabile aleatoria che descrive quanti sono i numeri pari ricevuti.
(i) Determinare la densità discreta $p(k) = P(X = k)$.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione di X e mostrarne il grafico.
(iii) Calcolare valore atteso e varianza di X.

Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, con X normale di media -2 e varianza 9, e con Y avente distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1/2$.
(i) Calcolare $P(X > 1, Y > 1)$.
(ii) Posto

$$T = p\,X + (1-p)\,Y, \qquad 0 \le p \le 1,$$

determinare

$$g(p) = E(T^2)$$

e ricavarne il minimo al variare di p.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Fisciano, 7/1/2010 – ore 15

Esercizio 1 In un esperimento che consiste nel lanciare 4 volte una moneta, sia $A = \{$nei primi 2 lanci non esce testa$\}$ e $B = \{$nei 4 lanci esce testa al più 1 volta$\}$.
(i) Calcolare $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ e $P(A \,|\, B)$.
(ii) Stabilire se A e B sono eventi indipendenti.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Determinare
(i) la densità $f(x)$, mostrandone l'andamento grafico,
(ii) i momenti $E(X^n)$ per ogni intero positivo n,
(iii) valore atteso e varianza di X.
(iv) Stabilire per quali valori di n risulta $E(X^{n+1})\, E(X^{n-1}) \geq [E(X^n)]^2$.

Esercizio 3 Nell'estrazione senza reinserimento di 2 biglie da un'urna contenente numeri da 1 a 4, sia X il numero di volte che esce un numero pari, e sia Y il numero minimo estratto.
(i) Determinare la densità di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Ricavare la varianza di $X - Y$.
(iv) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 27/1/2010

Esercizio 1 Da un'urna che contiene 5 biglie numerate da 1 a 5 si effettuano 3 estrazioni con reinserimento.
(i) Calcolare la probabilità che la sequenza dei 3 numeri estratti sia ordinata in senso crescente.
(ii) Calcolare la probabilità che il primo numero estratto è k dato che la sequenza dei 3 numeri estratti è ordinata in senso crescente, per $k = 1, 2, 3$.
(iii) Verificare che la somma delle 3 probabilità calcolate al punto (ii) è unitaria.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

(i) Determinare la densità $f(x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Valutare $E(1/X)$.
(iii) Calcolare $P(X > s)$ e $P(X > s + t \,|\, X > t)$ per $s, t \geq 1$, e stabilire per quali valori di t sussiste la seguente relazione:

$$P(X > 2t \,|\, X > t) \geq P(X > t).$$

Esercizio 3 Nell'esperimento che consiste nel lancio di 4 monete a caso, sia X il numero di volte che esce testa, e sia Y la lunghezza della più lunga sottosequenza di risultati costituiti da tutte testa.
(i) Determinare la densità di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 10/2/2010

Esercizio 1 Date due urne A e B, si supponga che l'urna A sia composta da 4 biglie bianche e 6 nere mentre l'urna B ne contenga 5 bianche e 5 nere. Si estraggono a caso (senza reinserimento) due biglie dall'urna A e una dall'urna B.
(i) Calcolare la probabilità che almeno una delle 3 biglie estratte sia bianca.
(ii) Calcolare la probabilità che la seconda biglia estratta dall'urna A sia bianca.
(iii) Calcolare la probabilità che la biglia estratta dall'urna B sia di colore diverso della seconda biglia estratta dall'urna A.

Esercizio 2 Un esperimento consiste nel lanciare 3 volte una moneta truccata (con probabilità di mostrare testa $p = 1/4$). Sia X la variabile aleatoria così definita:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa per la prima volta al primo lancio,} \\ 2 & \text{se esce testa per la prima volta al secondo lancio,} \\ 3 & \text{se esce testa per la prima volta al terzo lancio,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la densità discreta $p(x) = P(X = x)$.
(ii) Calcolare la funzione di distribuzione $F(x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Valutare $E(X)$ e $Var(X)$.

Esercizio 3 Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie normali indipendenti e identicamente distribuite, ciascuna di media 2 e varianza 1, e sia

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Posto $n = 4$,
(i) calcolare $P(1 < \overline{X} < 3)$,
(ii) determinare $P(1 < \overline{X} < 3 \,|\, \overline{X} > 1)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 24/2/2010

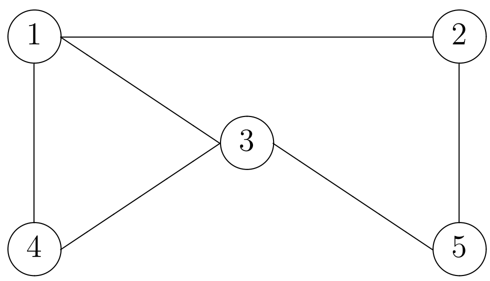
Esercizio 1 Un algoritmo genera a caso una sequenza $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, dove ciascun c_i può assumere valore $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}$. Si ponga $A_k = \{k$ valori della sequenza sono pari a $\mathbf{0}\}$ e $B_j = \{j$ valori della sequenza sono pari a $\mathbf{1}\}$.
(i) Calcolare $P(A_k)$, per $k = 0, 1, \ldots, n$.
(ii) Calcolare $P(A_k \cap B_{n-k})$, per $k = 0, 1, \ldots, n$.
(iii) Verificare che

$$\sum_{k=0}^{n} P(A_k) = 1$$

e calcolare

$$\sum_{k=0}^{n} P(A_k \cap B_{n-k}).$$

Esercizio 2 Un esperimento consiste nello scegliere a caso un nodo del seguente grafo:



Siano X e Y le variabili aleatorie che descrivono rispettivamente il minimo e il massimo tra i numeri dei nodi connessi da un singolo arco al nodo scelto a caso.
(i) Determinare la densità discreta congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iii) Valutare $P(X + Y \leq 4 \,|\, X + Y \leq 5)$.

Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, con X normale di media 1 e varianza 4, e con Y avente la seguente densità di probabilità:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Calcolare $P(\{X > 0\} \cup \{Y > 1/2\})$.
(ii) Determinare $E(X + Y)$ e $Var(X + Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 13/4/2010

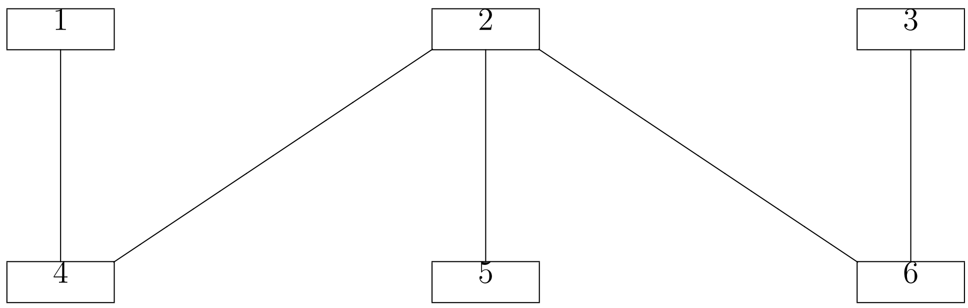
Esercizio 1 Si consideri l'esperimento che consiste nello scegliere a caso e senza reinserimento tre biglie da un'urna che ne contiene 5 bianche, 3 blu e 2 rosse.
(i) Calcolare la probabilità che almeno una delle tre biglie estratte sia blu.
(ii) Calcolare la probabilità che le prime due estratte siano di colore diverso.
(iii) Calcolare la probabilità che le prime due estratte siano di colore diverso sapendo che almeno una delle tre biglie estratte è blu.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^3}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la densità di probabilità di X, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare valore medio e varianza di X.
(iii) Determinare $P(X > 3 \mid X > 2)$.

Esercizio 3 Si consideri l'esperimento che consiste nello scegliere a caso una coppia di nodi del seguente grafo:



Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di archi che costituiscono il percorso minimo tra i due nodi scelti, e sia Y la variabile aleatoria che rappresenta il minimo delle label dei due nodi scelti.
(i) Determinare la densità di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Calcolare la covarianza di (X, Y).
(iii) Ricavare valore medio e varianza di $X + Y$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 17/6/2010

Esercizio 1 Un esperimento consiste nello scegliere a caso una tra tre monete (m_1, m_2, m_3). La moneta m_1 fornisce testa con probabilità $1/3$, la moneta m_2 con probabilità $3/4$ mentre la moneta m_3 è equa. Si effettuano tre lanci della moneta scelta a caso.
(i) Calcolare la probabilità di ottenere nei tre lanci una testa e due croci.
(ii) Sapendo che nei tre lanci si è avuto una testa e due croci, qual è la probabilità che la moneta lanciata sia m_i $(i = 1, 2, 3)$?.

Esercizio 2 Un dado non truccato viene lanciato due volte. Sia (X, Y) il vettore aleatorio discreto così definito:

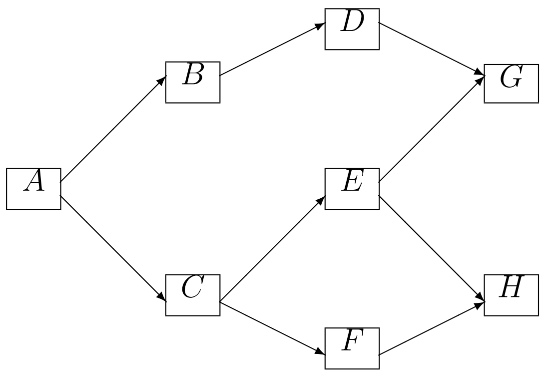
$$X = \begin{cases} 1 & \text{se la somma dei risultati dei due lanci è un numero primo,} \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$
$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se i due lanci forniscono lo stesso risultato,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la densità di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$ e $Var(Y)$.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).

Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, con X normale di media -1 e varianza 4, ed Y esponenziale di media 1.
(i) Calcolare $P(X \le -1, Y \le 2)$.
(ii) Posto
$$T = p\,X \cdot Y + q, \qquad p, q \in \mathbf{R},$$
determinare $E(T)$, $Var(T)$ e $Cov(T, X)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 21/7/2010

Esercizio 1 Un messaggio viene trasmesso sulla seguente rete, seguendo il verso indicato sugli archi. Partendo dal nodo A, dopo tre passi giunge o nel nodo G o nel nodo H. Quando il messaggio incontra una biforcazione (o in A, o in C, o in E) si lancia una moneta non truccata per decidere quale delle due direzioni prendere.



(i) Qual è la probabilità che al termine della trasmissione il messaggio si trovi nel nodo G?
(ii) Qual è la probabilità che al termine della trasmissione il messaggio si trovi nel nodo H?
(iii) Se al termine della trasmissione il messaggio si trova nel nodo G, qual è la probabilità che esso sia passato per il nodo E?
(iv) Se al termine della trasmissione il messaggio si trova nel nodo H, qual è la probabilità che esso sia passato per il nodo E?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente densità di probabilità

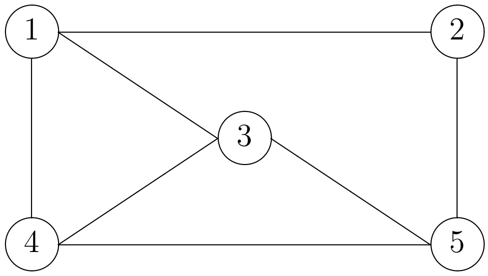
$$f(x) = \begin{cases} p & \text{per } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-p & \text{per } 0 < x \leq 1, \end{cases} \qquad (0 \leq p \leq 1).$$

(i) Determinare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$.
(ii) Ricavare il valore medio di X.
(iii) Calcolare la varianza di X, determinandone il massimo al variare di p.

Esercizio 3 In un gioco si lanciano a caso n monete da 1 euro e n monete da 2 euro. La vincita V è determinata sommando 2 euro per ogni volta che una moneta da 2 euro mostra testa e sottraendo 1 euro per ogni volta che una moneta da 1 euro mostra testa.
(i) Esprimere V come combinazione lineare di variabili aleatorie di Bernoulli, specificando quali sono i valori che essa può assumere.
(ii) Determinare valore medio e varianza di V.
(iii) Fare uso della disuguaglianza di Chebyshev per ricavare una limitazione inferiore per $P(0 \leq V \leq n)$, specificando per quali valori di n è significativa.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 10/9/2010

Esercizio 1 Un messaggio viene trasmesso sulla seguente rete bidirezionale, con la regola che quando il messaggio incontra una diramazione si sceglie a caso quale direzione prendere, ma senza poter tornare nel nodo attraversato immediatamente prima.



Partendo dal nodo 1, il messaggio dopo 2 passi giunge nel nodo 3 o nel nodo 4 o nel nodo 5.
(i) Calcolare la probabilità $P(B_k)$ che dopo 2 passi il messaggio si trovi nel nodo k (con $k = 3, 4, 5$), e verificare che $P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 1$.
(ii) Se dopo 2 passi il messaggio si trova nel nodo 5, qual è la probabilità che esso sia passato per il nodo r (con $r = 2, 3, 4$)?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria discreta avente densità di probabilità

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - 2p & \text{per } x = -1, \\ p & \text{per } x = 0 \text{ e } x = 1, \end{cases} \qquad (0 \le p \le 1/2).$$

(i) Determinare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \le x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Ricavare il valore medio di X.
(iii) Calcolare la varianza di X, determinandone il massimo al variare di p.

Esercizio 3 Data una moneta truccata (tale che ad ogni lancio mostra testa con probabilità p), sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di volte che esce testa in n lanci indipendenti. Posto $Y = n(1 - p) + X$,
(i) Determinare valore medio e varianza di Y.
(ii) Fare uso della disuguaglianza di Chebyshev per ricavare una limitazione inferiore per $P(n/2 \le Y \le 3n/2)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 17/12/2010

Esercizio 1 In un esperimento si genera a caso una sequenza di 3 bit. Si ponga $A = \{$i 3 bit sono uguali$\}$, $B = \{$almeno un bit è pari a 1$\}$, $C = \{$almeno 2 bit sono pari a 0$\}$. Stabilire se le seguenti uguaglianze sono soddisfatte e commentare i risultati:
(i) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,
(ii) $P(A \cap C) = P(A)P(C)$,
(iii) $P(B \cap C) = P(B)P(C)$,
(iv) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Esercizio 2 Un esperimento consiste nel lanciare ripetutamente una coppia di dadi non truccati. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di lanci necessari perché si realizzi una coppia di numeri pari per la prima volta.
(i) Determinare la densità discreta $p(x) = P(X = x)$ per $x = 1, 2, \ldots$
(ii) Calcolare la probabilità che siano necessari almeno 2 lanci per ottenere una coppia di numeri pari.
(iii) Determinare il numero atteso di lanci necessari perché si realizzi una coppia di numeri pari.

Esercizio 3 Sia X una variabile aleatoria continua avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} + b\,x^2 & 0 < x < 1, \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare il valore della costante b.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$ e disegnarne il grafico.
(iii) Calcolare $P(X > 1/2 \,|\, X > 1/4)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 20/12/2010

Esercizio 1 Si considerino 3 urne di cui la k-esima ($1 \leq k \leq 3$) è composta da $4-k$ biglie rosse e k blu. Si sceglie a caso un'urna e da essa si estraggono 2 biglie senza reinserimento.
(i) Determinare la probabilità che la prima biglia estratta sia blu.
(ii) Se la prima biglia estratta è blu, qual è la probabilità che anche la seconda biglia sia blu?

Esercizio 2 Un esperimento consiste nel lanciare 6 volte una moneta non truccata. Sia X la variabile aleatoria così definita:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se si realizza lo stesso numero di teste e croci,} \\ 2 & \text{se esce testa un numero di volte maggiore del numero di croci,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la densità discreta $p(x) = P(X = x)$.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$ e disegnarne il grafico.
(iii) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

Esercizio 3 Il numero di anni di funzionamento di un tipo di macchina è una variabile aleatoria X avente distribuzione esponenziale di valore atteso $E(X) = 6$.
(i) Determinare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$.
(ii) Qual è la probabilità che una tale macchina funzioni per più di 12 anni dal momento dell'acquisto?
(iii) Quanto vale la probabilità al punto (ii) se la macchina comprata è usata e vecchia di 1 anno?

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 21/12/2010

Esercizio 1 Una scatola contiene 10 sacchetti di cui 2 con un premio all'interno. Alice sceglie a caso 2 dei 10 sacchetti. Successivamente Bob sceglie a caso un sacchetto degli 8 rimanenti.
(i) Calcolare la probabilità che nei sacchetti scelti da Alice vi siano k premi ($k = 0, 1, 2$).
(ii) Determinare la probabilità che ci sia un premio nel sacchetto scelto da Bob.
(iii) Se Bob ha scelto un sacchetto con il premio, qual è la probabilità che Alice non abbia ricevuto premi?

Esercizio 2 Un esperimento consiste nel lanciare 3 dadi non truccati. Sia X la variabile aleatoria definita come

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se i tre numeri sono tutti pari o tutti dispari,} \\ 1 & \text{se escono due numeri pari ed uno dispari,} \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la densità discreta $p(x) = P(X = x)$.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$ e disegnarne il grafico.
(iii) Calcolare $E(X^n)$, $n \geq 1$.
(iv) Calcolare $E(|X|)$.

Esercizio 3 Sia X una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $(-1, b)$, e tale che $E(X) = 0$.
(i) Ricavare la costante b.
(ii) Determinare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Valutare $P(|X| \leq 1/2 \,|\, X > -1/2)$.