UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

Appunti del corso di

Analisi Matematica I

Prof. Luca Esposito

a.a. 2007/2008

Indice

CAPITOLO 1

Introduzione

Questi appunti sono in fase di allestimento e verranno ampliati e corretti nel corso del tempo. Gli appunti sono destinati agli studenti del mio corso di Analisi Matematica. Chiunque voglia segnalarmi degli errori puó farlo inviandomi un messaggio all'indirizzo, *luesposi@unisa.it* . La lettura di questi appunti richiede conoscenze preliminari di Matematica elementare che lo studente dovrebbe aver acquisito negli anni di formazione preuniversitaria. Il capitolo 2 "Conoscenze preliminari" puó anche essere saltato ed é destinato agli studenti che ritengono di non avere una buona formazione matematica. Lo studente più esperto potrá leggere questo capitolo senza grosse difficoltá in ogni caso una rapida lettura gli consentirà di richiamare alcuni concetti di base di Matematica e Logica e acquisire familiarità con il simbolismo e il linguaggio adottato negli appunti.

CAPITOLO 2

Conoscenze preliminari

1. Proposizioni e predicati

In questa sezione richiameremo con alcuni esempi il vocabolario e la sintassi necessari per l'interpretazione delle dimostrazioni. La disciplina matematica che si occupa di codificare i concetti intuitivi delle dimostrazioni è la Logica. In quanto teoria del ragionamento la Logica tenta di spiegare in che modo le persone traggono deduzioni. Consideriamo qualche esempio.

$$\frac{\textit{Tutti gli uomini sono mortali.}\qquad \textit{Socrate è un uomo.}}{\textit{Socrate è mortale.}}$$

La regola che consente di dedurre l'asserzione che è al di sotto della riga partendo dalle due asserzioni al di sopra della riga viene detta sillogismo. Il problema di individuare tali regole (sillogismi) è una questione fondamentale affrontata sin dai tempi di Aristotele. Per evidenziare lo schema alla base del precedente sillogismo riscriviamolo in generale.

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Tutti } A \textit{ sono } B.\\ C \textit{ è un } A.\end{array}}{C \textit{ è } B.}$$

Questa regola deduttiva sarà vera qualunque sia il valore di A,B,C. Non tutti i sillogismi presentati da Aristotele sono altrettanto ovvi. Consideriamo il seguente

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Nessun } A \textit{ è } B.\\ \textit{Alcuni } C \textit{ sono } A.\end{array}}{\textit{Alcuni } C \textit{ non sono } B.}$$

Il sillogismo appena scritto è corretto ma per convincersi della sua correttezza occorre pensarci un pò. I sillogismi si applicano alle proposizioni, e vengono utilizzati nel linguaggio comune per dedurre certe proposizioni a partire da altre proposizioni. Precisiamo cosa è una proposizione.

Proposizioni

I mattoni dell'edificio della Logica sono le proposizioni. Per comprendere cosa sia una proposizione osserviamo che alcune frasi che chiameremo proposizioni esprimono una tesi (danno delle informazioni). Consideriamo i seguenti esempi.

Berlino è la capitale della Germania.
a,b,c sono i lati di un triangolo.
Il mondo è piatto.
La somma degli angoli interni di un triangolo. è 180^0.

Viceversa nessuna delle seguenti frasi esprime una tesi.

Qual'è la capitale della Grecia ?
Vi dichiaro in arresto.
Che ore sono ?
Se oggi piove.

Le proposizioni (che verranno si solito indicate con una lettera maiuscola) possono essere vere o false. Le proposizioni possono essere combinate tra di loro così come avviene nel linguaggio comune. Per combinare le proposizioni useremo i seguenti connettivi logici.

$$\textbf{non, e, o,} \Longrightarrow, \Longleftrightarrow .$$

Se per esempio A e B sono le proposizioni A="Berlino è la capitale della Germania", B="Il mondo è piatto" potremo costruire a partire da A e B le seguenti nuove proposizioni

$$\mathrm{A}\ \textbf{o}\ \mathrm{B},\ \mathrm{A}\ \textbf{e}\ \mathrm{B},\ \textbf{non}\ \ \mathrm{A},\ \textbf{non}\ \ \mathrm{B}.$$

Nell'esempio presentato sappiamo bene che A è vera mentre B è falsa. Cosa possiamo dire delle proposizioni ottenute combinando A e B ? È facile convincersi che A **e** B è falsa dato che A e B non sono entrambe vere, A **o** B è vera dato che una delle due è vera (per la precisione A), **non** A è ovviamente falsa mentre **non** B è vera. Per fare un esempio di come si applica il connettivo $\Longleftrightarrow$ consideriamo le proposizioni A="Oggi è il 25 Dicembre", B="Oggi è un giorno festivo". Possiamo costruire la nuova proposizione

$$\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$$

che si legge "A implica B" e può essere tradotta nel linguaggio comune

Se oggi è il 25 Dicembre allora oggi è un giorno festivo.

Naturalmente si capisce che non vale l'implicazione inversa B $\Longrightarrow$ A, dato che se oggi è un giorno festivo non è detto che sia Natale. Come ultimo esempio consideriamo le seguenti coppie di proposizioni A="Nicola è figlio di Mario.", B="Mario è il padre di Nicola." Evidentemente queste due proposizioni sono tra di loro equivalenti e si scrive

$$\text{A} \Longleftrightarrow \text{B}$$

In questo ultimo esempio l'equivalenza delle due proposizioni A e B vuol significare che se A è vera anche B è vera e viceversa se B è vera allora anche A è vera ovvero che A implica B e viceversa B implica A. Per riassumere quanto visto finora consideriamo la seguente tabella di verità

$$\begin{array}{ll}
A & : V\ V\ F\ F \\
B & : V\ F\ V\ F \\
 & \\
A\ \mathbf{e}\ B & : V\ F\ F\ F \\
A\ \mathbf{o}\ B & : V\ V\ V\ F \\
\mathbf{non}\ A & : F\ F\ V\ V \\
A \Longrightarrow B & : V\ F\ V\ V \\
A \Longleftrightarrow B & : V\ F\ F\ V
\end{array}$$

Nelle prime righe di questa tabella sono scritti i valori di verità delle proposizioni A e B e nelle colonne compaiono le quattro possibili combinazioni vero/falso che possono presentarsi. Conviene leggere la tabella per colonne, ad esempio nella prima colonna A e B sono entrambe vere dunque anche A **e** B è vera, questa è l'unica colonna in cui A **e** B è vera. La proposizione A **o** B è vera quando almeno una delle due tra A e B è vera e non si esclude che possano essere vere entrambe. Il simbolo A$\Longrightarrow$B crea una nuova proposizione che si legge "A implica B" o anche "se A allora B", questa proposizione è falsa soltanto se A e' vera e B è falsa, dunque il senso di questa proposizione è che se A è vera necessariamente B deve essere vera, mentre se A è falsa B può indifferentemente essere vera o falsa.

Predicati

Nel seguito avremo la necessità di fare asserzioni che possono fare riferimento a qualcosa che può assumere un valore variabile, ad esempio

Il giorno x è festivo.

Una tale asserzione la chiameremo predicato e la indicheremo con una lettera maiuscola seguita da una o più variabili tra parentesi. Un predicato diventa una proposizione una volta che il valore della variabile x viene fissato. Consideriamo qualche esempio di predicato

$$P(x) = \text{“nel luogo } x \text{ ci sono 40 gradi''}.$$

$$P(x,y) = \text{“nel luogo } x \text{ il giorno } y \text{ ci sono 40 gradi''}$$

Un predicato è vero o falso soltanto quando viene trasformato in una proposizione. Fissare il valore delle variabili non è però l'unico modo di trasformare un predicato in una proposizione, l'altro modo è di utilizzare i cosiddetti quantificatori universali

$$\forall \text{ (si legge “per ogni ”)}, \quad \exists \text{ (si legge “esiste”)}.$$

Partendo dagli esempi precedenti di predicato possiamo costruire le seguenti proposizioni utilizzando i quantificatori

$$(\forall x,\ \text{P(x)})=\text{“In ogni luogo ci sono 40 gradi.”}$$

$$(\exists x : P(x))=\text{“C'è un luogo dove ci sono 40 gradi.”}$$

La parentesi tonda nell'ultima frase si legge “esiste x tale che P(x)” (i due punti si leggono “tale che”). Se si vuole indicare che esiste un unico valore si utilizza il simbolo $\exists!$ che si legge “esiste unico”.

$$(\exists! x\ :\ \text{P(x)})=\ \text{“Esiste un unico luogo in cui ci sono 40 gradi.''}$$

I quantificatori possono essere combinati se un predicato dipende da più variabili ad esempio se consideriamo come prima il predicato

$$P(x,y) = \text{“nel luogo } x \text{ il giorno } y \text{ ci sono 40 gradi''}$$

possiamo costruire le seguenti propisizioni

$$\exists y\ :\ \text{P(Palermo,y)}=\text{“Certi giorni a Palermo ci sono 40 gradi.''}$$

$$\forall x, \exists y\ :\ \text{P(x,y)}=\text{“In ogni luogo ci sono giorni in cui ci sono 40 gradi''}$$

osserviamo che se si scambiano di posto i quantificatori la proposizione cambia completamente, e diventa infatti

$$\exists y : \forall x\ :\ \text{P(x,y)}=\text{“C'è un giorno in cui ci sono 40 gradi dappertutto.''}$$

2. Le dimostrazioni

Per effettuare le dimostrazioni ovvero dedurre delle proposizioni da altre proposizioni potremmo utilizzare esclusivamente le seguenti tre regole fondamentali della Logica

- $\forall$ A, (A o **non** A) (principio del terzo escluso)
- $\forall$ A, **non**(A e **non** A) (principio di non contraddizione)
- $\forall$ A,B,C, [((A$\Longrightarrow$B) e (B$\Longrightarrow$ C))$\Longrightarrow$ (A$\Longrightarrow$ C)] (Principio di transitività)

Osserviamo che le regole della logica possono essere applicate soltanto se si dispone di un certo numero di proposizioni vere. Per poter dimostrare qualcosa occorre dunque assumere alcune proposizioni vere per convenzione, tali proposizioni vengono dette postulati o assiomi. La geometria Euclidea per esempio è basata sui cinque assiomi di Euclide che riportiamo per completezza.

Postulato 1 Da un punto qualsiasi è possibile condurre ad ogni altro punto una e una sola retta.

Postulato 2 È possibile prolungare, da entrambi i lati, una linea retta finita di una quantità maggiore di qualunque lunghezza assegnata.

Postulato 3 È possibile descrivere uno e un solo cerchio con centro e raggio dati qualsiasi.

Postulato 4 Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.

Postulato 5 Se (in un piano) una retta, intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

Gli elementi di Euclide costituiscono dunque un sistema assiomatico, basato sui cinque postulati scritti sopra. Per fare alcuni esempi e svolgere qualche esercizio introduciamo un sistema assiomatico molto più elementare (L'esempio è tratto dal libro di Richard Trudeau [T]). Per discutere questo esempio dobbiamo prima definire i termini tecnici.

DEFINIZIONE 2.1. *Il Club delle Tartarughe è un insieme di una o più persone. Una persona appartenente al Club è detta Tartaruga. I Comitati sono insiemi di una o più Tartarughe. Una Tartaruga appartenente a un comitato è detta membro di quel Comitato. Due Comitati sono uguali se ogni membro del primo è anche membro del secondo, e se ogni membro del secondo è anche membro del primo. Due Comitati che non hanno membri in comune vengono detti disgiunti.*

Assiomi (Club delle Tartarughe)
1) Ogni Tartaruga è membro di almeno un Comitato.
2) Per ogni coppia di Tartarughe esiste uno ed un solo Comitato di cui entrambe sono membri.
3) Per ogni Comitato esiste uno ed un solo Comitato disgiunto.

Per esercizio il lettore può provare il seguente teorema

TEOREMA 2.1. *Ogni Tartaruga è membro di almeno due comitati.*

Utilizzando gli assiomi le definizioni ed il Teorema 2.1 vogliamo dimostrare il seguente

TEOREMA 2.2. *Ogni Comitato ha almeno due membri.*

Dimostreremo questo teorema per assurdo e cioè assumeremo che la tesi del teorema sia falsa fino a giungere ad una contraddizione. In generale questa tecnica dimostrativa procede nel modo seguente. Supponiamo di voler provare che

$$H \Longrightarrow T.$$

Cominciamo supponendo che **non** T sia vera. Questa ipotesi è detta ipotesi per assurdo ed è una ipotesi temporanea da cui vogliamo ricavare una contraddizione. Se dimostriamo che **non** T porta ad una contraddizione, T deve essere vera per i principi di non contraddizione e del terzo escluso.

DIMOSTRAZIONE. Teorema2.2

(1) Supponiamo esista un comitato con un solo membro e sia t sia il solo membro di C (ipotesi per assurdo)
(2) t è una tartaruga (definizione di comitato)
(3) t è membro di un secondo comitato D (Teorema 1)
(4) Sia E il Comitato disgiunto da D (esiste per il terzo assioma)
(5) t non è membro di E (t è in E; D ed E sono disgiunti)
(6) C ed E sono disgiunti (C ha un solo elemento che non è in E)
(7) E è disgiunto sia da C che da D (quarto e sesto punto)
(8) E è disgiunto da un solo comitato (terzo assioma)
(9) Contraddizione (i punti 7 ed 8 sono in contraddizione)
(10) Per il principio di non contraddizione l'ipotesi da cui siamo partiti nel punto uno è falsa (principio di non contraddizione)
(11) La negazione del primo punto è vera (principio del terzo escluso)

$\square$

Alla fine di questa sezione riportiamo un elenco di simboli con il loro significato accanto.

Simboli

$\forall$ "Per ogni" $\exists$ "Esiste" $\exists!$ "Esiste unico"

$\Longrightarrow$ "Implica" $\Longleftrightarrow$ "Equivale" : "Tale che".

3. Algebra elementare

In questa sezione richiamiamo alcune proprietà algebriche dei numeri che dovrebbero essere note allo studente fin dai corsi superiori.

Notazioni

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\} = \text{ “Insieme dei numeri” naturali}$$
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \text{“Insieme dei numeri interi”}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} :\ n, m \in \mathbb{Z}\right\} = \text{ “Insieme dei numeri razionali}''$$
$$\mathbb{R} = \text{ “Numeri reali”}.$$

Notiamo che nell'elenco appena fatto non abbiamo definito i numeri reali dato che la definizione dei numeri reali sarà oggetto dei prossimi capitoli. Osserviamo però che alcuni numeri reali che non sono razionali sono noti allo studente e sono per esempio i numeri $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e$.

Mentre in aritmetica compaiono solo costanti numeriche (in pratica solo numeri interi e razionali specificati), in algebra si usano anche simboli (ad esempio a, x, y) per indicare numeri reali o complessi non fissati o speciticati ma suscettibili di assumere valori diversi. Ciò è di grande utilità perchè consente la formulazione generale di leggi aritmetiche (come a + b = b + a per ogni a e b), e costituisce il primo passo per un'esplorazione sistematica delle proprietà del sistema dei numeri reali consentendo di riferirsi a numeri "sconosciuti" (variabili, incognite) e quindi di formulare delle equazioni e di sviluppare tecniche per risolverle. Un'equazione è l'affermazione che due espressioni sono uguali. Alcune equazioni sono vere per ogni valore delle variabili incognite (per esempio a + (b + c) = (a + b) + c); esse sono conosciute come identità, uno studio sistematico di tali proprietà verrà fatto nei prossimi capitoli. Altre equazioni contengono dei simboli per le variabili incognite e dunque si pone il problema di trovare quei particolari valori che rendono vera l'uguaglianza. Tali valori sono detti soluzioni dell'equazione. Le equazioni più semplici da risolvere sono quelle lineari, come per esempio

$$2x + 3 = 10.$$

La tecnica fondamentale per la risoluzione di equazioni di questo tipo è quella di aggiungere, sottrarre, moltiplicare o dividere entrambi i membri dell'equazione per lo stesso numero, e, ripetendo più volte questo processo, arrivare ad esprimere direttamente il valore della x. Nell'esempio precedente, se sottraiamo 3 da entrambi i membri, otteniamo

$$2x = 7$$

e dividendo entrambi i membri per 2, otteniamo la soluzione

$$x = \frac{2}{7}$$

È bene segnalare che un errore tipico. Supponiamo di voler trovare le soluzioni dell'equazione $(x-3)(x^5-2x^2-1) = (x-3)(x^5+x)$, se erroneamente procediamo alla semplificazione del termine $(x-3)$ otteniamo $(x^5-2x^2-1) = (x^5+x)$, mentre però la prima equazione ha come soluzione $x = 3$ la seconda non ha affatto soluzioni. Equazioni del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.1}$$

sono note come equazioni di secondo grado e si risolvono con la ben nota formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.2}$$

Verificare la correttezza della formula risolutiva 3.1 è un semplice esercizio che ci consentirà di richiamare alcune regole algebriche elementari.

ESEMPIO 3.1. *Definiamo $\Delta = b^2 - 4ac$. Verifichiamo (4.2) nell'ipotesi che risulti $\Delta > 0$. Osserviamo che se calcoliamo $x_1 + x_2$ e $x_1 \cdot x_2$ otteniamo*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

dunque risulta

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 + x_2\right] =$$

$$a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Finalmente dalla equivalenza

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

si evince che x_1 ed x_2 sono le soluzioni dell'equazione (4.1).

Potenze a esponente intero

Se denotiamo con a un numero reale ed n un numero naturale, il prodotto di a per se stesso n volte si denota con a^n. Per definizione $a^0 = 1$. Si ricordi inoltre che se $a \neq 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Valgono inoltre le seguenti regole fondamentali di facile verifica

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{3.3}$$

Le regole per operare con esponenti razionali saranno discusse nel capitolo sui numeri reali.

4. Cenni di teoria degli insiemi.

Notazioni

Sia $S \neq \emptyset$ un insieme, per indicare che x è un elemento di S scriveremo

$$x \in S \quad (x \text{ appartiene ad } S).$$

Se viceversa x non è un elemento di S scriveremo

$$x \notin (x \text{ non appartiene ad } S).$$

Un insieme A ec̀ontenuto in un altro insieme S se se solo se tutti gli elementi di A appartengono ad S.

$$A \subset S \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a \in A \Longrightarrow a \in S).$$

Assegnati A, B sottoinsiemi di S si definiscono unione intersezione e complemento nel modo seguente

$$A \cup B = \{x \in S : \ x \in A \ \text{ oppure } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \text{ e } x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x \in S : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Siano A e B due insiemi. Si definisce prodotto cartesiano di A e B e si indica con $A \times B$ l'insieme di tutte le coppie di A e B

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Un sottoinsieme R di $A \times A$ si chiama relazione binaria. Una relazione binaria si chiama d'ordine se gode delle seguenti proprietà

(1) *riflessiva*: $\forall a \in A$ si ha $(a, a) \in R$
(2) *transitiva*: se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, allora $(a, c) \in R$
(3) *asimmetrica*: se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ allora $a = b$.

5. Esercizi relativi al capitolo 2

1. Costruire la tabella di verità di (A **e** B)$\Longrightarrow$C. (Nelle prime tre righe di tale tabella devono esserci tutte le possibili combinazioni dei valori di verità di A,B, e C combinati tra loro; nella quarta riga devono esserci i corrispondenti valori di verità di(A **e** B)$\Longrightarrow$C).
2. Tradurre utilizzando i quantificatori, la frase, "Il cubo di un numero reale è positivo se il numero è positivo, è negativo se il numero è negativo."
3. Dire quali tra le seguenti proposizioni sono vere

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1$
(2) $\exists x \in \mathbb{R}\ : x^2 \geq 1$
(3) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
(4) $\exists x \in \mathbb{R},\ : x^2 < 0$

4. Dimostrare che ogni tartaruga è membro di almeno tre comitati
5. Qual'è il più piccolo numero possibile di Tartarughe ? E di Comitati ?
6. Dite quali fra le seguenti operazioni sono corrette.

$$\frac{a}{\frac{4}{5}} = \frac{4a}{5}; \quad \frac{3+a}{3b} = \frac{1+a}{b}; \quad \frac{\sqrt{3(1+a^2)}}{3} = \sqrt{1+a^2}; \quad \frac{x}{x} = 1.$$

7. Semplificare l'espressione

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b-c}}\left(2+\frac{a^2-b^2-c^2}{bc}\right)+\frac{(a+b)^2}{2bc}$$

8. Risolvere l'equazione

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

9. Senza utilizzare la calcolatrice dire quali tra le seguenti disuguaglianze sono vere.

$$\frac{7}{9} > \frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{3} < -1; \quad \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \geq 1$$

10. Utilizzando le regole delle potenze calcolare sempre in forma di potenza.

$$4^9 \cdot 4^{12} = \ldots \quad \frac{5^{13}}{5^8} = \ldots \quad \frac{(2^3)^5}{4^{-3}}.$$

11. Verificare che

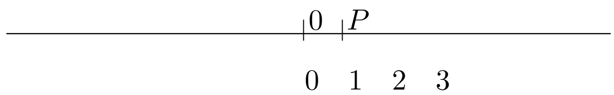
$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

CAPITOLO 3

Insiemi numerici e funzioni di variabile reale.

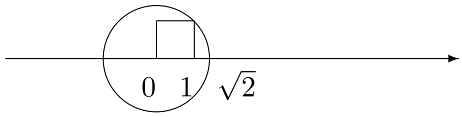
1. $\sqrt{2}$ non è razionale

L'insieme dei numeri reali è la materia prima su cui si fonda l'intero corso di Analisi e non solo. In questa sezione introdurremo questo insieme dal punto di vista assiomatico e ne discuteremo le proprietà fondamentali. Tale insieme consente di rappresentare grandezze spaziali o temporali che variano con continuità. Per avere un riferimento geometrico visivo che sarà di ausilio per tutto il corso ricordiamo che i numeri reali, che da un punto di vista intuitivo sono i "numeri decimali", possono essere rappresentati su una retta.



Fissato infatti un punto origine O corrispondente allo zero ed un punto P a destra di questo, si sceglie per convenzione il segmento $\overline{OP}$ come unità di misura e si fa corrispondere P al numero 1. I numeri naturali possono essere ottenuti sommando più volte il segmento $\overline{OP}$, per individuare i numeri razionali si dovrà invece suddividere l'unità di misura $\overline{OP}$, ecc.... In sostanza ogni numero $a \in \mathbb{R}$ potrà essere rappresentato da punto sulla retta che dista esattamente a volte dall'origine.
In questo modo è possibile rappresentare tutti i numeri su una retta. Viceversa si pone la questione se ogni punto dell'asse reale sia corrispondente di un numero. Se ci limitiamo ad usare i numeri razionali non tutti i punti risultano corrispondenti di qualche numero e dunque la risposta è negativa.

Consideriamo infatti la seguente semplice costruzione.



Costruiamo un quadrato di lato uno sull'asse reale. Se centriamo il compasso nell'origine e tracciamo la circonferenza di raggio uguale alla diagonale d del quadrato otteniamo un punto di intersezione con l'asse reale la cui distanza dall'origine coincide esattamente con lunghezza della diagonale d del quadrato. Evidentemente però $d = \sqrt{2}$ e dunque tale punto di intersezione corrisponde ad un numero non razionale.

$\sqrt{2}$ non è razionale.

Se per assurdo fosse $\sqrt{2}$ razionale dovrebbero esistere due numeri naturali n, m tali che $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$, ovvero

$$n^2 = 2m^2.$$

Tale equazione non ha però soluzioni intere come si evince dalla scomposizione in fattori primi di n ed m. Il fattore 2 in tale scomposizione dovrebbe essere presente infatti un numero pari di volte a sinistra dell'uguaglianza ed un numero dispari di volte a destra dell'uguaglianza, ma questo è impossibile.

2. Assiomi dei numeri reali

Dal punto di vista assiomatico l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ può essere definito come un insieme su cui sono definite due operazioni $+, \cdot$, e una relazione d'ordine e che verifichi i seguenti assiomi.

Assiomi relativi alle operazioni ($(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo)

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associativa)
(2) $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$ (commutativa)
(3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributiva)
(4) $\exists 0, 1 \in \mathbb{R} : \ a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a \ \ \forall a \in \mathbb{R}$ (elementi neutri)
(5) $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists -a \in \mathbb{R} \ : \quad a + (-a) = 0$ (esistenza opposto)
(6) $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R} \ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \ : \quad a \cdot (a^{-1}) = 1$ (esistenza inverso)

Assiomi relativi all'ordinamento

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è ordinato e l'ordine è compatibile rispetto alle operazioni.

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ risulta $a \leq b$ oppure $b \leq a$ (ordine totale)
(2) Se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c \ \ \forall c \in \mathbb{R}$
(3) Se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora risulta anche $0 \leq a + b, \quad 0 \leq a \cdot b$

Gli assiomi appena enunciati sono condivisi anche dall'insieme dei numeri razionali. L'assioma che caratterizza l'insieme dei numeri reale e che lo distingue da quello dei numeri razionali è il seguente.

Assioma di completezza

Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ separati, ovvero tali che

$$a \leq b \quad \forall a \in A,\ b \in B.$$

Allora *esiste* almeno un numero reale c tale che

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A,\ b \in B.$$

L'assioma di completezza può sembrare a prima vista una proprietà ovvia ma non è così. L'insieme dei numeri razionali infatti non verifica l'assioma di completezza. Per verificare questo fatto basta considerare la seguente coppia di insiemi

$$A = \{a \in \mathbb{Q} :\ a \leq 0\} \cup \left\{a \in \mathbb{Q} :\ a > 0, a^2 < 2\right\}$$

$$B = \left\{b \in \mathbb{Q} :\ b > 0, b^2 > 2\right\}.$$

Lo studente può verificare agevolmente che A e B sono separati ovvero

$$a \leq b \quad \forall a \in A \ \ \forall b \in B.$$

Inoltre si osservi che $A \cup B = \mathbb{Q}$ infatti un qualsiasi numero razionale o risulta negativo e allora appartiene ad A oppure è positivo e non potendo essere il suo quadrato uguale a due tale numero è in A oppure è in B. Dimostriamo che per questa coppia di insiemi non è verificato l'assioma di completezza procedendo per assurdo. Se per assurdo esistesse un numero razionale $c \in \mathbb{Q}$ tale che $b \leq c \leq a$, per ogni $a \in A$, $b \in B$ tale numero dovrebbe necessariamente appartenere ad uno dei due insiemi ma in entrambi i casi si giunge ad una contraddizione. Facciamo vedere per esempio che se $c \in A$ si ottiene una contraddizione (il lettore farà lo stesso tipo di verifica nel caso $c \in B$). Se $c \in A$ allora

$$c^2 < 2, \quad \text{e inoltre } a \leq c \ \ \forall a \in A$$

dunque c dovrebbe essere il più grande elemento di A ovvero il più grande numero razionale il cui quadrato è minore di 2. Se facciamo vedere dunque che per $n \in \mathbb{N}$ opportunamente scelto $(c + \frac{1}{n})^2 < 2$ otteniamo un numero di A maggiore di c e questo è assurdo. D'altronde è facile verificare algebricamente che se $n \geq \frac{(2c+1)}{(2-c^2)}$ risulta effettivamente $(c+\frac{1}{n})^2 < 2$, infatti.

$$\left(c+\frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} < c^2 + \frac{2c+1}{n} < 2.$$

(La penultima disuguaglianza discende dal fatto che $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$).

3. Funzioni e rappresentazione cartesiana.

Siano assegnati due insiemi qualsiasi A e B non vuoti. Una funzione dall'insieme A all'insieme B può essere definita come un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathcal{R} \subset A \times B$ che verifica la seguente condizione

$$\forall x \in A \; \exists! \; y \in B : \; (x, y) \in \mathcal{R}.$$

Dal punto di vista intuitivo una tale funzione che indichiamo con il simbolo $f : A \longrightarrow B$ è una legge che fa corrispondere ad ogni elemento dell'insieme A uno ed un solo elemento dell'insieme B. Se $x \in A$ è un generico elemento di A, l'elemento corrispondente di x tramite f si denota con i simbolo $f(x)$ e viene detto immagine di x tramite f. Sinteticamente scriveremo $y = f(x)$ per denotare una tale funzione. L'insieme A viene detto dominio dell'insieme di definizione di f mentre B viene detto codominio. In questo corso studieremo quasi esclusivamente funzioni il cui dominio A sarà un sottoinsieme dei numeri reali. Una tale funzione sarà detta funzione di variabile reale. Facciamo alcuni esempi.

$$f(x) = 2x \tag{3.1}$$

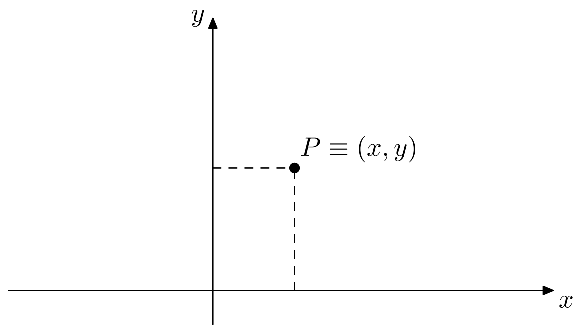
$$f(x) = \sqrt{x} \tag{3.2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

La funzione 3.1 è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque il suo dominio è tutto l'insieme $\mathbb{R}$. Per ottenere l'immagine $f(x)$ del generico elemento $x \in \mathbb{R}$ tramite questa funzione è sufficiente moltiplicare x per 2. Il dominio di questa funzione è tutto $\mathbb{R}$. La funzione 3.2 è definita soltanto per $x \geq 0$ dunque il suo dominio è costituito dai numeri reali non negativi $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq 0\}$. Per ottenere l'immagine di x tramite f occorre questa volta calcolare la radice quadrata di x. La funzione 3.3 è detta funzione gradino o anche funzione di Heaviside, il suo dominio è tutto $\mathbb{R}$. Per effettuare la rappresentazione cartesiana di una funzione si tracciano due rette perpendicolari che si intersecano in un punto 0, origine degli assi. Su ogni asse si fissa una unità di misura ed una direzione positiva. L'asse orizzontale lo diremo asse delle ascisse o asse x, l'asse verticale lo diremo asse delle ordinate o asse y.

Il generico punto del piano sarà così identificato con un elemento del prodotto cartesiano.

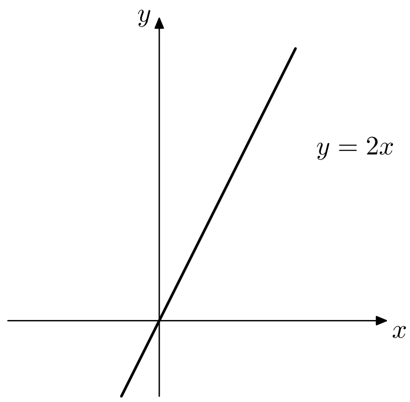
$$P \equiv (x, y) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y.$$

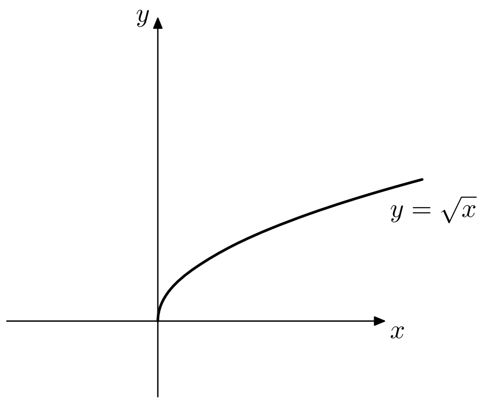


Per rappresentare poi una funzione basterà disegnare tutti i punti del piano del tipo $(x, f(x))$. In definitiva il grafico di $f : A \longrightarrow B$ è definito nel seguente modo

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) : \quad x \in A\}.$$

Riportiamo di seguito grafico delle funzioni $(3.1), (3.2)$, il lettore disegni il grafico della funzione 3.3.



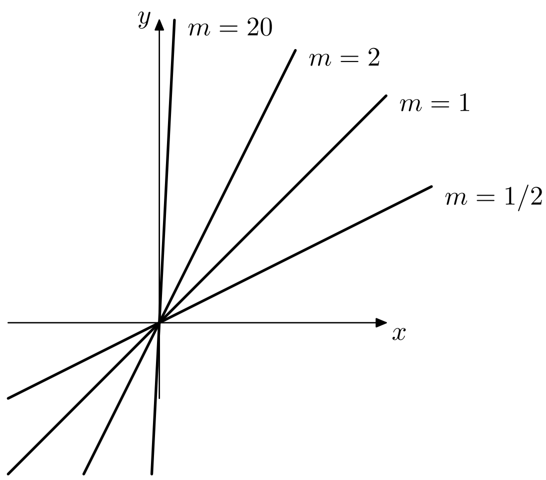


4. Funzioni lineari e rette.

In questa sezione studiamo uno dei primi esempi di funzione di variabile reale, le funzioni lineari. Si dice funzione lineare una funzione del tipo.

$$y = mx + q \tag{4.1}$$

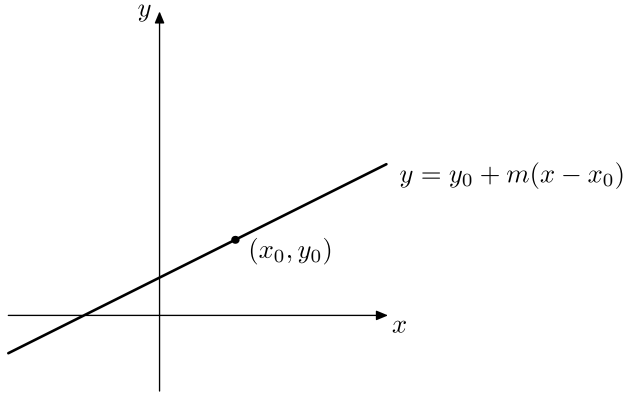
con m, q numeri reali fissati. Il grafico della funzione 4.1 rappresenta una retta che denoteremo retta r. Il parametro m viene detto coefficiente angolare dell retta r. Modificare il parametro m comporta un cambiamento nell'inclinazione della retta. Modificare il parametro q comporta invece un innalzamento o abbassamento della retta. Per chiarire il concetto immaginiamo di considerare rette del tipo $y = mx$ con $q = 0$. Questa famiglia di rette passa per l'origine. Al crescere di m l'inclinazione della retta aumenta, l'asse delle x ha coefficiente angolare nullo. Le rette del II e IV quadrante hanno coefficiente angolare negativo.



Se all'equazione $y = mx$ sommiamo il parametro q il grafico della retta viene traslato verso l'alto o verso il basso a seconda che q sia positivo o negativo.

Spesso sarà utile nel seguito ricordare l'espressione della generica retta passante per il punto di coordinate (x_0, y_0) che è data da

$$y = y_0 + m(x - x_0) \tag{4.2}$$



OSSERVAZIONE 4.1. *Assegnati due punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ con $x_0 \neq x_1$ è possibile calcolare il coefficiente angolare m della retta passante per tali punti. Sia infatti $y = mx + q$ l'equazione della retta passante per questi due punti. Le coppie $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ verificano dunque l'equazione $y = mx + q$, possiamo scrivere allora*

$$y_1 = mx_1 + q$$
$$y_0 = mx_0 + q.$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo $(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$ e dividendo per $(x_1 - x_0)$ si ricava

$$m = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} \tag{4.3}$$

A partire dalla precedente osservazione è possibile determinare l'equazione della retta passante per due punti. Tale retta infatti deve passare per (x_0, y_0) e dunque la sua equazione è del tipo 4.2 e il suo coefficiente angolare è dato da 4.3, dunque si ottiene

$$y = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \tag{4.4}$$

che è l'equazione della retta passante per i punti (x_0, y_0); (x_1, y_1).

5. Funzioni invertibili, funzioni composte.

Sia data una funzione $f : X \longrightarrow Y$, diremo che f è iniettiva se elementi distinti di X hanno immagini distinte in Y, ovvero equivalentemente se elementi che hanno immagini uguali sono necessariamente uguali.

$$\text{f è iniettiva} \overset{def}{\Longleftrightarrow} (f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2).$$

Diremo che una funzione è suriettiva se ogni elemento di Y è immagine di qualche elemento di X, ovvero

$$\text{f è suriettiva} \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall y \in Y \ \ \exists x \in X \ : y = f(x)).$$

Una funzione che risulti contemporaneamente iniettiva e suriettiva viene detta biettiva.

$$\text{f è biettiva} \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall y \in Y \ \ \exists!\ x \in X \ : y = f(x)).$$

Se una funzione $f : X \longrightarrow Y$è invertibile è possibile definire la funzione inversa di f.

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X$$

che ad ogni $y \in Y$ fa corrispondere *l'unico* $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Osserviamo che dunque risulta

$$f(f^{-1}(y)) = y, \ \ \forall y \in Y \qquad f^{-1}(f(x)) = x, \ \ \forall x \in X$$

Durante il corso capiterà spesso di dover calcolare esplicitamente l'inversa di una funzione assegnata dunque il lettore è invitato ad esercitarsi sull'argomento.

In presenza di più funzioni è possibile nel caso che il codominio dell'una coincida con il dominio dell'altra determinare la funzione composta. Siano date

$$f : X \longrightarrow Y; \quad g : Y \longrightarrow Z$$

la funzione composta di f e g che si indica con $f \circ g$ e che per semplicità denoteremo con h è la funzione che ha come dominio X e come codominio Z e precisamente ad $x \in X$ associa $g(f(x)) \in Z$

$$h \equiv f \circ g : X \longrightarrow Y; \quad h(x) = g(f(x)).$$

Terminiamo la sezione osservando che nel caso che $f : X \longrightarrow Y$ non è invertibile, se $B \subset Y$ si definisce ugualmente

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \ f(x) \in B\}$$

in questo caso $f^{-1}(B)$ non indica l'immagine di B mediante l'inversa di f ma bensì denota l'insieme di tutti gli elementi di X la cui immagine è in B. Analogamente si definisce

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A \ : f(x) = y\}$$

6. Esercizi relativi al capitolo 3.

1. Provare che se $p \in \mathbb{N}$ è un numero primo $\sqrt{p}$ non è un numero razionale. Dedurre che se $n \in \mathbb{N}$ non è quadrato perfetto $\sqrt{n}$ non é un numero razionale.
2. Utilizzando *esclusivamente* gli assiomi dei numeri reali della sezione due provare le seguenti proprietà dei numeri reali.

(1) Se $a + b = a + c$ allora $b = c$.
(2) Se $a \cdot b = a \cdot c$ e se $a \neq 0$ allora $b = c$.
(3) Se $a \cdot b = 0$ allora ($a = 0$ oppure $b = 0$).
(4) Se $0 < a < b$ allora $a^{-1} < b^{-1}$ (con notazione differente) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

3. Dire quali delle seguenti funzioni sono iniettive e motivare la risposta (le funzioni sono da intendersi definite sul più ampio sottoinsieme possibile di $\mathbb{R}$).

(1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $x^2 + 2$
(2) $f(x) = x^3 - 2$; $f(x) = 3x + 1$

4. Determinare l'inversa delle seguenti funzioni lineari.

$$f(x) = 2x + 3; \quad g(x) = x + 2$$

5. Calcolare la composta delle funzioni f e g dell'esercizio precedente
6. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto di coordinate $(1, 3)$ di coefficiente angolare 4.
7. Una volta individuata la funzione che definisce la retta dell'esercizio precedente determinare la sua inversa. (si osservi che il coefficiente angolare della retta rappresentato dall'inversa è il reciproco del coefficiente angolare della retta di partenza)
8. Sia $f : X \longrightarrow Y$ provare che

$$f \text{ è iniettiva } \iff f^{-1}(f(A)) = A \ \ \forall A \subset X$$

CAPITOLO 4

Proprietà fondamentali di $\mathbb{R}$

In questo breve capitolo raccogliamo le proprietà fondamentali di $\mathbb{R}$ che discendono dall'assioma di completezza e che utilizzeremo per la costruzione delle funzioni elementari.

Notazioni
Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ utilizzeremo le seguenti notazioni per denotare gli intervalli di $\mathbb{R}$.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}\,; \qquad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}\,.$$

1. Massimo, minimo, inf e sup.

Consideriamo un sottoinsieme A dei numeri reali. Il concetto di massimo elemento di A è molto intuitivo e corrisponde al maggiore degli elementi di A, dunque vale la seguente definizione

$$\text{M massimo di } A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a \leq M, & \forall a \in A \\ M \in A \end{cases} \tag{1.1}$$

Analogamente si definisce il minimo di un insieme

$$\text{m minimo di } A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} m \leq a, & \forall a \in A \\ m \in A \end{cases} \tag{1.2}$$

Denoteremo con max A il massimo dell'insieme A e con min A il minimo. Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono dotati di massimo o di minimo. Se infatti consideriamo l'insieme $A =]a, b[$ con $a < b$, questo insieme non ha ne massimo ne minimo, infatti $a \notin A$ e $b \notin B$. Si comprende in ogni caso che i numeri a e b nell'esempio precedente pur non essendo elementi di A (e dunque non possono essere massimo o minimo di A) costituiscono gli estremi dell'insieme A. Difatti nell'esempio considerato b è il più piccolo tra tutti i numeri maggiori degli elementi di A mentre a è il più grande tra tutti i numeri minori degli elementi di B e saranno detti estremo superiore ed inferiore rispettivamente. Per definire cosa sono l'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme numerico definiamo prima cosa è un maggiorante e cosa è un minorante. Un numero β si dice un maggiorante dell'insieme A se $a \leq \beta \ \forall a \in A$, analogamente α si dice minorante dell'insieme A se $\alpha \leq a \ \forall a \in A$. Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ammettono maggioranti o minoranti, ad esempio $\mathbb{R}^+$ non ammette maggioranti. Diremo che A è limitato superiormente se ammette maggioranti, viceversa lo diremo limitato inferiormente se ammette minoranti. Se A ammette sia maggioranti che minoranti lo diremo limitato

$$A \text{ limitato} \overset{def}{\iff} \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \alpha \leq a \leq \beta,\ \forall a \in A.$$

Finalmente possiamo definire estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme numerico.

Definizione 1.1. *Sia $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. Diremo che β è l'estremo superiore di A se β è il minimo dei maggioranti di A.*

L'assioma di completezza garantisce l'esistenza dell'estremo superiore di un insieme limitato superiormente

Teorema 1.1 (Esistenza dell'estremo superiore.). *Sia $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. Allora esiste l'estremo superiore di A.*

Dimostrazione. Denotiamo con B l'insieme costituito da tutti i maggioranti di A, tale insieme è non vuoto dato che A è limitato superiormente. Gli insiemi A e B sono separati dunque è possibile applicare a questi insiemi l'assioma di completezza. Esiste dunque $\beta \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq \beta \leq \alpha, \qquad \forall\ a \in A, \quad b \in B. \tag{1.3}$$

Dalla 1.3 si evince immediatamente che β è l'estremo superiore di A, infatti β è maggiore o uguale a tutti gli elementi di A e quindi è un maggiorante di A; inoltre β è più piccolo di tutti gli elementi di B e dunque è il minimo dei maggioranti di A. □

Nella pratica per provare che un numero β è l'estremo superiore di un insieme numerico A conviene ridurre la verifica a due disequazioni. Osserviamo infatti che dire che β è l'estremo superiore di A vuol dire che $\beta - \varepsilon$ non è un maggiorante, comunque sia scelto $\varepsilon > 0$ e cioè $M - \varepsilon$ è minore di qualche elemento di A. Si ottiene dunque la seguente caratterizzazione dell'estremo superiore.

$$(\beta \text{ estremo superiore di } A) \iff \begin{cases} a \leq \beta, & \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists a \in A: \ \beta - \varepsilon < a. \end{cases} \tag{1.4}$$

Si definisce analogamente l'estremo inferiore di A come il più grande minorante si A e grazie all'assioma di completezza si prova che ogni insieme limitato inferiormente ammette estremo inferiore. Analogamente vale la seguente caratterizzazione

$$(\alpha \text{ estremo inferiore di } A) \iff \begin{cases} \alpha \leq a, & \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists a \in A: \ a < \alpha + \varepsilon. \end{cases} \tag{1.5}$$

Denoteremo nel seguito con $\sup A$ l'estremo superiore di A e con $\inf A$ l'estremo inferiore di A. Per convenzione se $A \subset \mathbb{R}$ non è limitato superiormente diremo che il suo estremo superiore è $+\infty$, se viceversa A non è limitato inferiormente diremo che il suo estremo inferiore è $-\infty$.

$$\sup A = +\infty \iff \forall\beta\exists a \in A : \ \beta < a$$
$$\inf A = -\infty \iff \forall\alpha\exists a \in A : \ a < \alpha$$

Sia infine $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo gli estremi di f

$$\sup f \stackrel{def}{=} \sup f(X) \equiv \sup \{f(x); x \in X\}, \tag{1.6}$$

$$\inf f \stackrel{def}{=} \inf f(X) \equiv \inf \{f(x); x \in X\}. \tag{1.7}$$

2. Proprietà di Archimede e densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

La proprietà di Archimede discende dall'assioma di completezza e dalla proprietà di buon ordinamento dei numeri naturali. Osserviamo esplicitamente che a partire dall'elemento neutro del prodotto, $1 \in \mathbb{R}$ si possono determinare i numeri $2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, \ldots$. In definitiva $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, inoltre i numeri naturali sono ordinati in modo standard, $1 < 2 < 3 < \ldots$. Ricordiamo che l'insieme $\mathbb{N}$ è ben ordinato e cioè ogni sua parte non vuota è dotata di minimo.

$$\forall \emptyset \neq A \subset \mathbb{N} \ \exists m = \min A.$$

Teorema 2.1 (Proprietà di Archimede). *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$.*

Dimostrazione. Se per assurdo esistesse $x \in \mathbb{R}$ tale che $n \leq x \ \forall n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\mathbb{N}$ sarebbe limitato superiormente e dunque dotato di estremo superiore M grazie al teorema 1.1. Si avrebbe dunque $n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$, ma siccome $n + 1 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$ risulterebbe anche $n + 1 \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$ e cioè $n \leq M - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo è però assurdo dato che allora $M - 1$ sarebbe un maggiorante di $\mathbb{N}$ contrariamente all'ipotesi che M è il più piccolo dei maggioranti di $\mathbb{N}$. □

Dalla proprietà di Archimede è possibile ricavare la proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). *Per ogni coppia di numeri reali a, b con $a < b$ esiste un numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ tale che $a < q < b$*

Dimostrazione. Possiamo assumere che a e b hanno lo stesso segno altrimenti la dimostrazione è ovvia dato che lo zero è compreso tra a e b. Supponiamo ad esempio $0 < a < b$ (se viceversa $a < b < 0$ ci si riconduce al caso positivo considerando la coppia -b,-a). Sia $n > \frac{1}{b-a}$ che esiste per la proprietà archimedea, risulta allora $nb - na > 1$. Denotiamo con m il più piccolo numero naturale tale che $na < m$, risulterà allora $m - 1 \leq na < m$ e dunque anche

$$na < m = (m - 1) + 1 \leq na + 1 < na + (nb - na) = nb,$$

ovvero $na < m < nb$, e dividendo queste disequazioni per n si ottiene la tesi. □

3. Esercizi relativi al capitolo 4

1. Determinare il massimo e il minimo dei seguenti insiemi numerici.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 \leq 10\right\}; \qquad B = \left\{x \in \mathbb{N} : \frac{24}{n} \in \mathbb{N}\right\}$$

2. Verificare che non esiste il massimo del seguente insieme e determinare il suo estremo superiore

$$A = \left\{\frac{n}{2n+3}\right\}$$

3. Verificare che l'insieme $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : \quad x^3 > 2\right\}$ non ammette estremo inferiore nell'ambito dell'insieme dei numeri razionali.

4. Utilizzando la caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore determinare gli estremi dei seguenti insiemi

$$A = \left\{\frac{n}{n^2+3} + 1 : \ n \in \mathbb{N}\right\}; \qquad B = \left\{n + \frac{3}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

5. Provare che $\sup f = \inf(-f)$

6. Siano $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Verificare che risulta

$$\begin{aligned} \inf f + \inf g &\leq \inf(f+g) \\ \sup f + \sup g &\geq \sup(f+g) \end{aligned}$$

7. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e siano $A \subset B \subset X$ verificare che risulta

$$\inf_B f \overset{def}{=} \inf f(B) \leq \inf_A f \overset{def}{=} \inf f(A)$$

$$\sup_B f \overset{def}{=} \sup f(B) \geq \sup_A f \overset{def}{=} \sup f(A)$$

8. Provare che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

CAPITOLO 5

Le funzioni elementari

Questa sezione è dedicata all'introduzione delle funzioni elementari. Preliminarmente definiamo il concetto di funzione monotòna.

DEFINIZIONE 0.1. *Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, diremo che f è strettamente monotòna in X se verifica una delle seguenti condizioni per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in X$.*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{(}f\text{ è strettamente crescente)}$$
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{(}f\text{ è strettamente decrescente).}$$

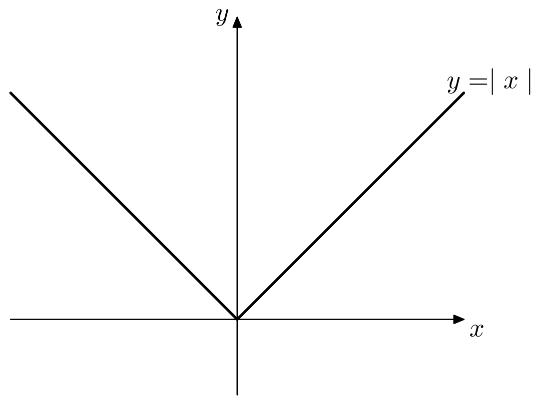
Se le disuguaglianze nella precedente definizione non sono strette diremo semplicemente che la funzione è monotòna (crescente o decrescente).

1. Funzione valore assoluto

La funzione valore assoluto è definita su tutto $\mathbb{R}$ e si indica con $\mid x \mid$,

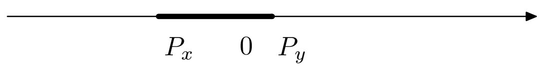
$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Il grafico di questa funzione è composto dalla parte positiva delle due bisettrici degli assi.



OSSERVAZIONE 1.1. *La funzione valore assoluto di x è connessa al concetto di distanza. Se rappresentiamo infatti x sull'asse reale e indichiamo P_x il punto associato ad x risulta $|\, x \,|= d(P_x, 0)$ dove indichiamo con la lettera d la distanza. In generale se due numeri reali x, y rappresentano i punti P_x e P_y avremo*

$$d(P_x, P_y) =|\, y - x \,|$$



Le seguenti proprietà del valore assoluto seguono direttamente dalla definizione e sono facilmente interpretabili in termini di distanza.

(1) $|\, x \,|\geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
(2) $|\, x \,|= 0, \iff x = 0$
(3) $|\, -x \,|=|\, x \,|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
(4) $|\, x_1 \cdot x_2 \,|=|\, x_1 \,| \cdot |\, x_2 \,|, \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

La funzione valore assoluto può essere utilizzata per descrivere gli intervalli di $\mathbb{R}$ che hanno il loro centro nell'origine. Fissato infatti $r \geq 0$, l'intervallo $[-r, r]$ é costituito dai numeri reali x tali che $-r \leq x \leq r$ ovvero da quei punti la cui distanza dall'origine è minore o uguale ad r e cioè da quei numeri x tali che $|\, x \,|\leq r$. Sussiste dunque la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia $r \geq 0$, vale allora la seguente equivalenza*

$$|\, x \,|\leq r \iff -r \leq x \leq r \tag{1.2}$$

DIMOSTRAZIONE. La proposizione 1.1 è di dimostrazione immediata. Utilizzando infatti la definizione di valore assoluto la relazione $|\, x \,|\leq r$ equivale a $x \leq r$ se $x \geq 0$ mentre equivale a $-x \leq r$, ovvero $-r \leq x$ se $x < 0$. Unendo assieme i due casi si ottiene $-r \leq x \leq r$. □

L'ultima proprietà del valore assoluto che dimostriamo è la *proprietà triangolare.*

PROPOSIZIONE 1.2 (Proprietà triangolare.). *Siano x, y numeri reali qualsiasi, allora*

$$|\, x + y \,|\leq|\, x \,| + |\, y \,| \tag{1.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla relazione ovvia $|\, x \,|\leq|\, x \,|$ (che vale con l'uguale), utilizzando la proposizione 1.1 (con $r =|\, x \,|$) ricaviamo

$$-\,|\, x \,|\leq x \leq|\, x \,|, \quad \text{e analogamente} -|\, y \,|\leq y \leq|\, y \,|,$$

Sommando queste due relazioni si deduce,

$$-(|\, x \,| + |\, y \,|\leq x + y \leq (|\, x \,| + |\, y \,|))$$

e riapplicando la proposizione 1.1, (con $r =|\, x \,| + |\, y \,|$) si ottiene la tesi. □

OSSERVAZIONE 1.2. *Applicando le proprietà del valore assoluto possiamo riscrivere la* (1.3) *nel modo seguente*

$$| x - y | \leq | x | + | -y | = | x | + | y |$$

Interpretata in termini di distanza questa seconda versione della disuguaglianza triangolare può essere riscritta

$$d(x,y) \leq d(x,0) + d(y,0)$$

ed esprime il fatto che il percorso diretto dal punto x al punto y è naturalmente più breve del percorso da x ad y passando per l'origine.

2. La funzione potenza.

Iniziamo lo studio della funzione potenza partendo dalle potenze intere.

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia $n \in \mathbb{N}$. Se n è pari la funzione $f(x) = x^n$ é positiva su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed è strettamente crescente su $\mathbb{R}^+$, strettamente decrescente su $\mathbb{R}^-$. Se nè dispari la funzione $f(x) = x^n$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, positiva su $\mathbb{R}^+$ e negativa su $\mathbb{R}^-$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo per induzione su n che $f(x) = x^n$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}^+$, le altre proprietà enunciate essendo facile conseguenza di quest'ultima. La base induttiva per $n = 1$ è ovvia. Per ipotesi induttiva assumiamo che sia $f(x) = x^n$ strettamente crescente e proviamo che allora anche $g(x) = x^{n+1}$ è strettamente crescente. Sia dunque $0 < x < y$, per ipotesi induttiva $0 < x^n < y^n$, moltiplicando questa disuguaglianza per x otteniamo

$$0 < x^{n+1} < xy^n,$$

se moltiplicando la disuguaglianza iniziale $0 < x < y$ per y^n otteniamo

$$0 < xy^n < y^{n+1},$$

Le due disuguaglianze evidenziate messe assieme implicano che

$$0 < x^{n+1} < y^{n+1}.$$

□

Dalla proposizione enunciata si deduce in particolare che la funzione $f(x) = x^n$ è iniettiva per qualsiasi valore di $n \in \mathbb{N}$. Se facciamo vedere che $f(x) = x^n$ è anche suriettiva allora $f(x) = x^n$ è invertibile e possiamo definire la sua inversa. Per semplicità proveremo la suriettività di $f(x) = x^n$ soltanto nel caso $n = 2$. Verifichiamo dunque che è suriettiva la funzione

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Sia allora $y \in \mathbb{R}^+$ vogliamo provare che esiste $x \in \mathbb{R}^+$ tale che $x^2 = y$. Definiamo la seguente coppia di insiemi

$$A = \left\{a \in \mathbb{R}^+ : \ a^2 < y\right\}$$

$$B = \left\{b \in \mathbb{R}^+ : \ b^2 > y\right\}.$$

Dato che $f(x) = x^2$ è strettamente crescente i due insiemi sono separati. L'assioma di completezza garantisce dunque l'esistenza di un numero $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq x \leq b \quad \forall a \in A,\ b \in B.$$

Faremo vedere che x è il numero cercato tale che $x^2 = y$. Basta verificare a questo scopo che il quadrato di x non è ne minore ne maggiore di y ovvero che x non appartiene ne ad A ne a B. Facciamo vedere ad esempio che se $x \in A$ si ottiene una contraddizione (in maniera analoga si procede se si assume $x \in B$). Se $x \in A$ allora

$$x^2 < y, \quad \text{e inoltre } a \leq x \ \ \forall a \in A$$

dunque x dovrebbe essere il più grande elemento di A ovvero il più grande numero di $\mathbb{R}^+$ il cui quadrato è minore di y. Se facciamo vedere dunque che per $n \in \mathbb{N}$ opportunamente scelto risulta $(x + \frac{1}{n})^2 < y$, otteniamo un numero di A maggiore di x e questo è assurdo. D'altronde è facile verificare algebricamente che se $n \geq \frac{(2x+1)}{(y-x^2)}$ risulta effettivamente $(x+\frac{1}{n})^2 < y$, infatti,

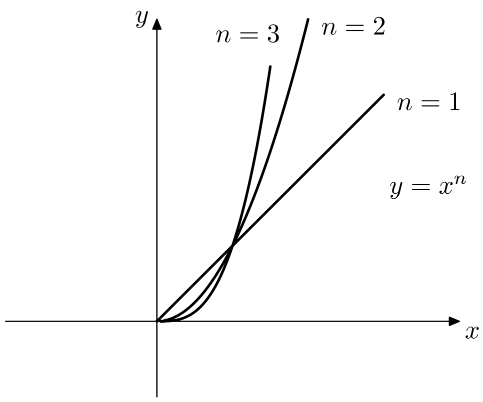
$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} < x^2 + \frac{2x+1}{n} < y.$$

(La penultima disuguaglianza discende dal fatto che $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$). Sussiste dunque la seguente proposizione.

Proposizione 2.2. *Sia $n \in \mathbb{N}$, la funzione*

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow x^n \in \mathbb{R}^+ \tag{2.1}$$

è strettamente crescente e suriettiva.



Possiamo dunque finalmente introdurre l'inversa della funzione potenza a esponente intero

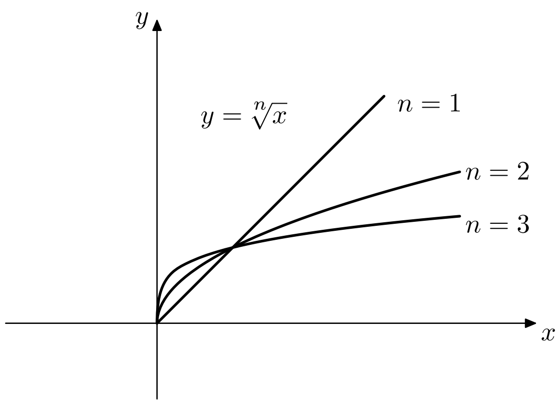
Definizione 2.1. *Sia $n \in \mathbb{N}$. L'inversa della funzione,*

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow x^n \in \mathbb{R}^+,$$

che esiste grazie alla proposizione precedente, sarà denotata $\sqrt[n]{x}$,

$$f^{-1} : x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}^+ \tag{2.2}$$

inoltre $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ è strettamente crescente.



Utilizzando le funzioni (2.2) e (2.1) possiamo definire l'operazione potenza ad esponente razionale.

Definizione 2.2. *Siano $n, m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^+$ per definizione poniamo*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \qquad a^{-\frac{m}{n}} = 1/\sqrt[n]{a^m}. \tag{2.3}$$

Le seguenti proprietà dell'operazione potenza ad esponente razionale sono di verifica immediata. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0$, $q, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$,

$$a^{q_1} \cdot a^{q_2} = a^{q_1+q_2} \tag{2.4}$$

$$(a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 \cdot q_2}, \tag{2.5}$$

$$a < b, \quad q > 0 \quad \Longrightarrow a^q < b^q, \tag{2.6}$$

$$a < b, \quad q < 0 \quad \Longrightarrow a^q < b^q, \tag{2.7}$$

$$a > 1, \quad q_1 < q_2 \quad \Longrightarrow a^{q_1} < a^{q_2}, \tag{2.8}$$

$$0 < a < 1, \quad q_1 < q_2 \quad \Longrightarrow a^{q_1} > a^{q_2}. \tag{2.9}$$

Le proprietà (2.6) – (2.9) sono conseguenza immediata della proprietà di stretta monotonia della funzioni potenza a esponente intero e della sua inversa.

Le proprietà (2.4) e (2.5) sono conseguenza della definizione 2.3 e di (3.3) e sono ben note allo studente fin dalle scuole superiori. Ad esempio la (2.5) discende dalla seguente catena di uguaglianze. Siano $q_1 = n/m$, $q_2 = h/k$ con $n, m, h, k \in \mathbb{N}$, allora

$$\begin{aligned}\left(a^{n/m}\right)^{h/k} &= \left((\sqrt[m]{a})^n\right)^{h/k} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{nh/k}\\ &= \left(\sqrt[k]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nh} = \left(\sqrt[km]{a}\right)^{nh} = a^{nh/km}\end{aligned}$$

Al momento abbiamo dunque definito a^q con $a \in \mathbb{R}^+$ e $q \in \mathbb{Q}$, il nostro scopo a questo punto è definire a^x con $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$. Vogliamo dare senso ad espressioni del tipo $2^{\sqrt{2}}$. L'idea è di definire $2^{\sqrt{2}}$ come estremo superiore di tutti i numeri del tipo 2^q con $q \in \mathbb{Q}$ e $q < 2$ Possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 2.3. *Siano $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ed $x \in \mathbb{R}$ per definizione poniamo*

$$a^x \overset{def}{=} \sup\{y \in \mathbb{R} : \ \exists\, q \in \mathbb{Q},\ q < y \ : \ a^q = y\} \tag{2.10}$$

o equivalentemente con scrittura diversa

$$a^x \overset{def}{=} \sup\{a^q; \quad q < y\} \tag{2.11}$$

Resta così definita l'espressione

$$a^x \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \ \ a > 0 \quad \text{e } x \in \mathbb{R}$$

Si potrebbe verificare che le proprietà $(2.4) - (2.9)$ sono vere non solo nell'insieme dei numeri razionali ma nell'insieme dei numeri reali. Vale dunque la seguente proposizione

Proposizione 2.3. *Le proprietà* $(2.4) - (2.9)$ *sono verificate per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0$, $q, q_1, q_2 \ \in \mathbb{R}$.*

Se nell'espressione a^b facciamo variare la base a otteniamo x^b ovvero la funzione potenza ad esponente reale, se facciamo variare b otterremo nella prossima sezione la funzione esponenziale a^x.

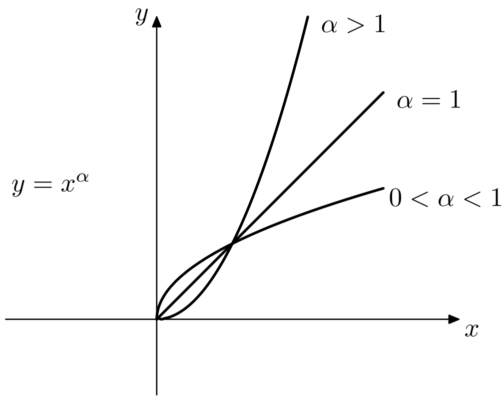
Riassumiamo le proprietà fondamentali della funzione potenza ad esponente reale.

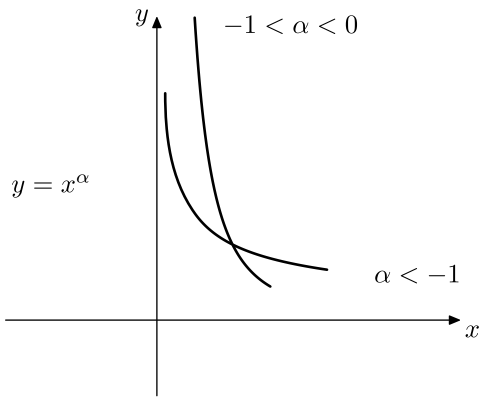
PROPOSIZIONE 2.4. *Sia* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La funzione*

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow x^\alpha \in \mathbb{R}^+$$

è strettamente crescente se $\alpha > 0$, *strettamente decrescente se* $\alpha < 0$.

I grafici della funzione potenza ad esponente reale sono riportati nelle prossime figure.





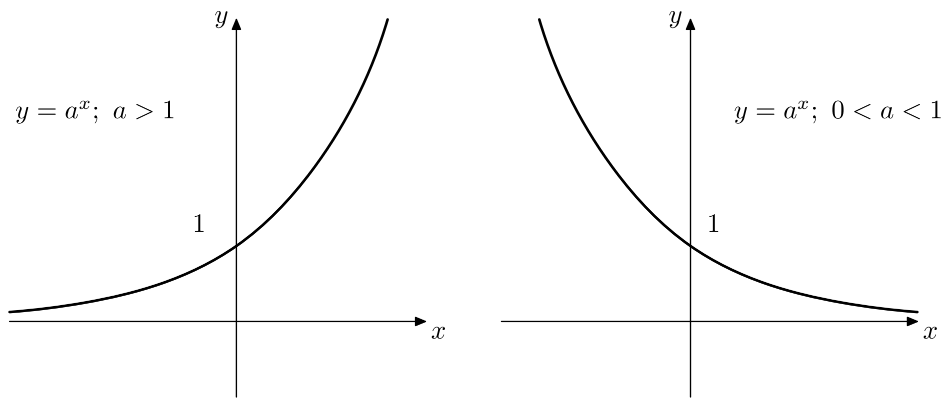
3. Funzione esponenziale e logaritmo.

La funzione esponenziale si ottiene facendo variare l'esponente nell'espressione a^b.

Proposizione 3.1. *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ la funzione esponenziale è così definita,*

$$a^x : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

Dalle proprietà (2.8),(2.9) si evince che la funzione esponenziale è strettamente crescente se $a > 1$ mentre è strettamente decrescente se $0 < a < 1$.



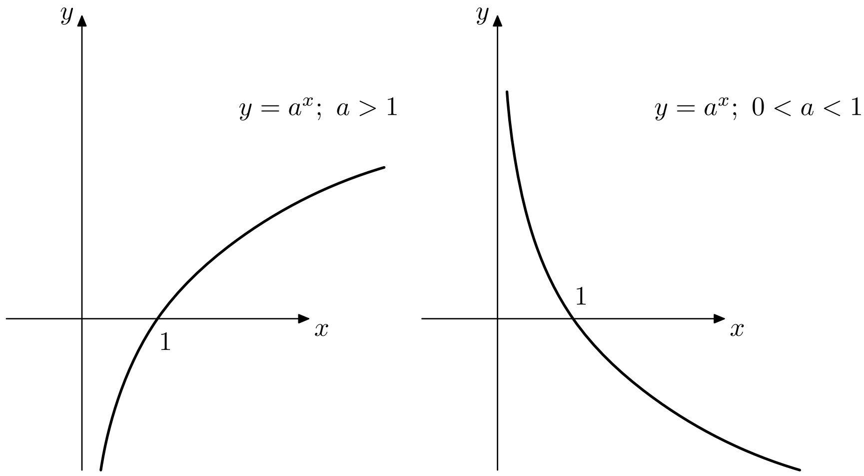
La funzione esponenziale (3.1) è una funzione suriettiva. La suriettività di questa funzione potrebbe essere verificata utilizzando l'assioma di completezza, per semplicità di esposizione proveremo invece la suriettività di (3.1) utilizzando il teorema dei valori inermedi nei capitoli sulla continuità delle funzioni. Si può dunque definire l'inversa della funzione esponenziale a^x come quella funzione che ad $y \in \mathbb{R}^+$ associa quell'unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. In definitiva dunque ricordando la relazione che sussiste tra una funzione e la sua inversa, ovvero $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$ si deduce

$$a^x = y \Longleftrightarrow x = \log_a y \tag{3.2}$$

Proposizione 3.2. *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ la funzione esponenziale* (3.1) *é suriettiva, e iniettiva (poichè strettamente monotòna), resta dunque definita la sua inversa,*

$$\log_a x : x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \log_a x \in \mathbb{R}^{\cdot} \tag{3.3}$$

Dalle proprietà di monotonia di a^x si deduce che la funzione logaritmo è strettamente crescente se $a > 1$ mentre è strettamente decrescente se $0 < a < 1$.



Dalle proprietà algebriche dell'esponenziale (2.4), (2.5) possono ricavarsi le seguenti proprietà della funzione logaritmo.

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y; \qquad \log_a \frac{y}{x} = \log_a y - \log_a x \tag{3.4}$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x \tag{3.5}$$

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b = \log_b x / \log_b a \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Proviamo per esempio (3.4). Per la proprietà (2.4) degli esponenziali risulta

$$a^{\log_a x \cdot y} = x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Il lettore può verificare agevolmente (3.5) utilizzando la proprietà (2.5) degli esponenziali. Verifichiamo infine (3.6). Preliminarmente osserviamo che per la (3.5) risulta

$$\log_a b \cdot \log_b a = \log_a b^{\log_b a} = \log_a a = 1$$

e questo giustifica la seconda uguaglianza nella (3.6). Infine per provare la prima uguaglianza nella (3.6) osserviamo che risulta

$$x = a^{log_a x} = a^{\log_a b^{(\log_b x)}} = a^{\log_b x \cdot \log_a b}$$

dove abbiamo utilizzato la (3.5) nella seconda uguaglianza. $\square$

4. Disequazioni irrazionali.

Iniziamo a discutere le disequazioni irrazionali ovvero disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x), \qquad \sqrt[n]{p(x)} < q(x), \tag{4.1}$$

con $p(x), q(x)$ polinomi. Il caso n dispari è particolarmente facile da trattare infatti ricordiamo che per la proposizione 2.1 la funzione $f(x) = x^n$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Per **n dispari** lo schema risolutivo delle (4.1) è il seguente

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \iff p(x) < [q(x)]^n$$
$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \iff p(x) > [q(x)]^n$$

ESEMPIO 4.1. *Risolviamo*

$$\sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} > x,$$

elevando entrambi i membri al cubo si ottiene $x^3-2x+1 > x^3$ *e semplificando si ha* $-2x + 1 > 0$ *e dunque infine* $x < 1/2$.

Il caso n pari è di trattazione meno immediata. Per comodità di scrittura discutiamo il caso della radice quadrata ovvero $n = 2$, gli altri casi si trattano esattamente allo stesso modo.

$$\sqrt{p(x)} < q(x) \tag{4.2}$$

In questo caso dovremo richiedere che il polinomio $p(x)$ sia non negativo altrimenti l'espressione sotto radice non è definita, inoltre dovremo anche richiedere $q(x) > 0$ altrimenti la (4.2) non può essere vera. Una volta richieste queste condizioni possiamo elevare entrambi i termini della disequazione (4.2) al quadrato. In definitiva lo schema risolutivo della (4.2) è il seguente.

$$\sqrt{p(x)} < q(x) \iff \begin{cases} p(x) & \geq 0 \\ q(x) & > 0 \\ p(x) & < [q(x)]^2 \end{cases}$$

L'ultimo caso che si può presentare è il seguente

$$\sqrt{p(x)} > q(x) \tag{4.3}$$

In questo caso ancora una volta si dovrà richiedere $p(x) \geq$. Si dovranno poi distinguere due casi. Se $q(x) < 0$ la (4.3) è naturalmente verificata, nell'altro caso $q(x) \geq 0$ si elevando entrambi i termini della (4.3) al quadrato. Riassumendo, in questo caso lo schema risolutivo della (4.3) è il seguente

$$\sqrt{p(x)} > q(x) \iff \begin{cases} p(x) & \geq 0 \\ q(x) & < 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} q(x) & \geq 0 \\ p(x) & > [q(x)]^2 \end{cases}$$

Facciamo qualche esempio di applicazione dei precedenti schemi risolutivi.

ESEMPIO 4.2. *Risolvere la disequazione*

$$2x-3>\sqrt{4x^2-13x+3}$$

Questa disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 4x^2-13x+3 & \geq 0 \\ 2x-3 & >0 \\ 4x^2-13x+3 & <(2x-3)^2 \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata per valori esterni a $1/4, 3$ *ovvero*

$$x \geq \frac{1}{4} \qquad \textit{oppure} \quad x \geq 3;$$

la seconda per

$$x>\frac{3}{2}$$

e la terza per

$$x>-6.$$

Dato che tutte e tre le condizioni devono essere verificate, la soluzione finale è $x \geq 3$.

ESEMPIO 4.3. *Risolvere la disequazione*

$$x-7<\sqrt{x^2-7x+6}$$

Questa disequazione è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2-7x+6 & \geq 0 \\ x-7 & <0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x-7 & \geq 0 \\ x^2-7x+6 & >(x-7)^2 \end{cases}$$

La soluzione del primo sistema è data da

$$x \leq 2 \qquad \text{oppure} \quad 7 \leq x<8;$$

il secondo sistema è soddisfatto per

$$x \geq 8.$$

Mettendo assieme queste condizioni si ottiene la soluzione finale

$$x \leq 2 \qquad \text{oppure} \quad 7 \leq x.$$

5. Disequazioni esponenziali e logaritmiche.

La risoluzione delle disequazioni esponenziali e logaritmiche è basata sul seguente schema risolutivo, sempre utilizzabile in presenza di funzioni che sono una l'inversa dell'altra. Siano dunque

$$f : X \longrightarrow Y; \quad f^{-1} : Y \longrightarrow X$$

funzioni strettamente crescenti, allora per $x \in X$ e $y \in Y$ risulta

$$f(x) < y \iff f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(y) \iff x < f^{-1}(y).$$

Sia $a > 1$, possiamo applicare il precedente schema risolutivo nel caso delle funzioni $f(x) = \log_a x$ e $f^{-1}(y) = a^y$, per $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$. Otteniamo dunque (**se** $\mathbf{a} > \mathbf{1}$)

$$\log_a x < y \iff x < a^y \tag{5.1}$$

ESEMPIO 5.1. *Risolvere la disequazione logaritmica*

$$\log_3 (x^2 + 1) < \frac{1}{2},$$

applicando l'esponenziale in base 3 *ad entrambi i termini della precedente disuguaglianza otteniamo*

$$x^2 + 1 < (3)^{\frac{1}{2}}$$

e dunque

$$x^2 < \sqrt{3} - 1 \iff |\, x \,| < \sqrt{\sqrt{3} - 1}.$$

Naturalmente la relazione (5.1) può essere utilizzata per risolvere anche le disequazioni esponenziali.

ESEMPIO 5.2. *Risolvere la disequazione esponenziale*

$$4^{x+1} > 2,$$

applicando il logaritmo in base 4 *ad entrambi i termini della precedente disuguaglianza otteniamo*

$$\log_4 4^{x+1} > \log_4 2$$

e dunque

$$x + 1 > -1 \iff x > -2.$$

Nel caso che la base dell'esponenziale e del logaritmo siano minori di uno l'unico cambiamento rispetto alla precedente discussione è il cambio di segno nella disequazione. Otteniamo dunque (**se $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{1}$**)

$$\log_a x < y \iff x > a^y \tag{5.2}$$

ESEMPIO 5.3. *Risolvere la disequazione logaritmica*

$$\log_{1/3}(x+1) < 2,$$

applicando l'esponenziale in base $1/3$ *ad entrambi i termini della precedente disuguaglianza otteniamo*

$$x + 1 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \iff x > -\frac{8}{9}.$$

ESEMPIO 5.4. *Risolvere la disequazione esponenziale*

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} < 16,$$

applicando il logaritmo in base $1/4$ *ad entrambi i termini della disuguaglianza otteniamo*

$$x - 1 > \log_{1/4} 16 \iff x > -1.$$

6. Esercizi relativi al capitolo 5.

1. Determinare i seguenti numeri reali
$$(64)^{\frac{1}{6}}; \quad \sqrt[6]{(-2)^8}; \quad (27)^{-\frac{1}{3}}.$$

2. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $xy \geq 0$. Provare che risulta
$$\sqrt{xy} = \sqrt{|\, x \,|} \cdot \sqrt{|\, y \,|}.$$
Si osservi che non si può scrivere in generale $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.

3. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali
$$\sqrt{4 - x^2} + x \geq 0; \quad |\, x \,| \sqrt{1 - 2x^2} > 2x^2 - 1$$

4. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni esponenziali.
$$(9)^{3x-2} > 3; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2} \geq 4; \quad 3 \cdot (5^{2x-7})^2 - 4 \cdot 5^{2x-7} + 1 > 0$$

5. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni logaritmiche.
$$\log (x-1)^2 - 10 \geq 0; \quad (x^2 - 3)^x < x^2 - 3; \quad \log (x^2 - 7x + 11) < 0$$

6. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni
$$\begin{cases} \ln (x^2 - 7) \leq 1 \\ 5^{x^3 - 3} \geq 25 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3^{\left| \frac{x^2}{x^2 - 2} \right|} \leq 9 \\ \sqrt{x^2 - 6x} \geq x - 1 \end{cases}$$

7. Provare che se $f : A \longrightarrow B$ è strettamente crescente e suriettiva allora f è invertibile e la sua inversa f^{-1} è strettamente crescente.

CAPITOLO 6

Le funzioni trigonometriche.

1. Misura degli angoli.

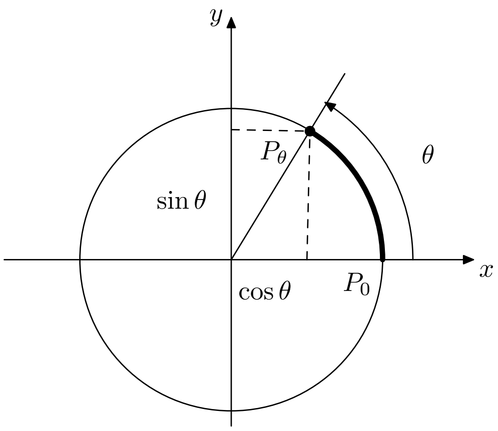
Per introdurre le funzioni trigonometriche sarà necessario introdurre alcune convenzioni per misurare gli angoli del piano. Ricordiamo intanto che la distanza del generico punto $P \equiv (x, y)$, dall'origine $O \equiv (0, 0)$ è espressa dalla formula

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

come si evince immediatamente dal teorema di Pitagora. Consideriamo la circonferenza unitaria centrata nell'origine ovvero l'insieme dei punti P del piano che hanno distanza dall'origine O uguale ad uno, l'equazione di tale circonferenza dunque è

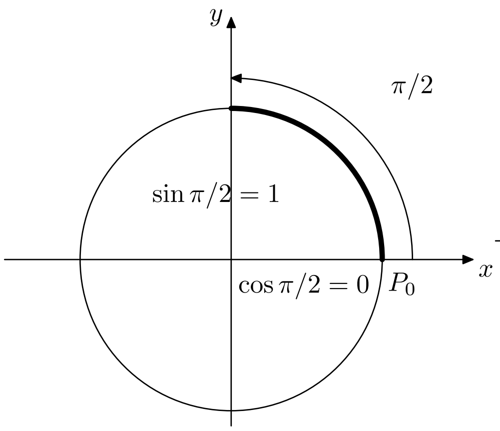
$$x^2 + y^2 = 1.$$

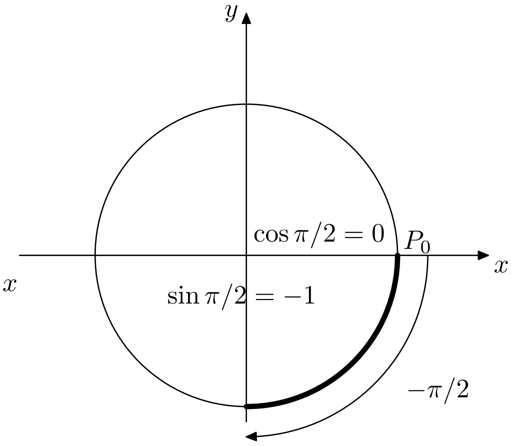
Denotiamo con $P_0 \equiv (1, 0)$ il punto di intersezione della circonferenza con l'asse delle ascisse. Sia r una qualsiasi semiretta uscente dall'origine e denotiamo con θ l'angolo compreso tra l'asse delle ascisse e la semiretta r e sia P_θ l'intersezione tra la circonferenza e la semiretta r, come in figura.



L'angolo θ sarà identificato con la sua misura in radianti ovvero con la lunghezza dell'arco orientato P_0P_θ. Gli angoli ottenuti a partire da P_0 in senso orario avranno segno negativo, quelli in senso antiorario segno positivo. Le coordinate del punto P_θ sono per definizione il coseno e il seno di θ,

$$P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta).$$





ESEMPIO 1.1. *Convenzionalmente si denota con π la lunghezza della semicirconferenza di raggio uno. Un angolo piatto misura dunque π, un angolo retto misura $\pi/2$, $-\pi/2$ denota l'angolo retto delimitante il quarto quadrante ottenuto ruotando in senso orario.*

Riassumendo, assegnato un angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ associamo ad esso un punto P_θ ottenuto percorrendo un arco di lunghezza θ lungo la circonferenza unitaria, a partire da P_0. L'ascissa e l'ordinata del punto P_θ sono rispettivamente il coseno ed il seno dell'angolo θ. Si osservi che le funzioni seno e coseno sono state definite in maniera descrittiva a differenza di quanto fatto per le funzioni precedenti, questo procedimento non consente un calcolo con precisione arbitraria di tutti i valori di tale funzione. Nel seguito colmeremo questa lacuna quando definiremo le serie numeriche. Per adesso limitiamoci ad osservare che in alcuni casi particolari il valore di seno e coseno è di valutazione immediata. Risulta infatti

$$\sin 0 = 0, \quad \sin\pi/2 = 1, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin 3/2\pi = -1$$
$$\cos 0 = 1, \quad \cos\pi/2 = 0 \quad \cos\pi = -1, \quad \cos 3/2\pi = 0$$

Infine ricordiamo che per convenzione ad ogni $\theta \in \mathbb{R}$ è possibile associare un punto sulla circonferenza unitaria ottenuto percorrendo la circonferenza stessa per una lunghezza pari a θ a partire da P_0. Naturalmente però dato che muoversi lungo la circonferenza per una lunghezza pari a 2π equivale a compiere un giro completo i punti corrispondenti a θ e a $\theta + 2k\pi$ saranno coincidenti. Per convenzione dunque se vogliamo associare ad ogni numero reale un angolo con vertice nell'origine dovremo identificare i numeri che differiscono per un multiplo di 2π. Sinteticamente scriveremo

$$\theta \equiv \theta + 2k\pi \tag{1.1}$$

2. Proprietà delle funzioni seno e coseno.

In base all'identificazione (1.1) gli angoli θ e $\theta + 2k\pi$ rappresentano lo stesso punto sulla circonferenza unitaria. Risulta dunque $\forall k \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \sin x = \sin x + 2k\pi \\ \cos x = \cos x + 2k\pi \end{cases} \tag{2.1}$$

Questa proprietà delle funzioni seno e coseno si riassume dicendo che tali funzioni sono periodiche di periodo 2π. La prima relazione fondamentale tra le funzioni seno e coseno deriva immediatamente dal teorema di Pitagora,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{2.2}$$

Enunciamo senza dimostrazione le fondamentali formule di addizione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{2.3}$$

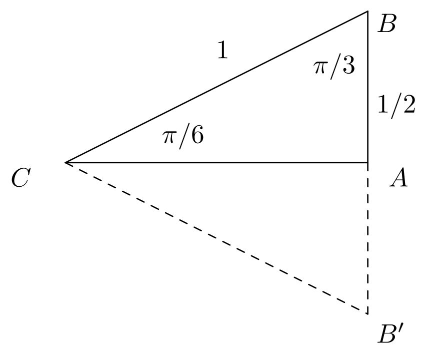
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{2.4}$$

Da queste ultime scegliendo $\alpha = \beta$ si ottengono le formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2.5}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{2.6}$$

Per alcuni angoli speciali è possibile calcolare esplicitamente il valore delle funzioni seno e coseno, riportiamo di seguito questi casi.



Facendo riferimento alla figura precedente assumiamo che l'angolo $A\widehat{C}B$ misuri $\pi/6$ e che il lato BC abbia lunghezza uno. Dato che la somma degli angoli interni ad un triangolo è π e poichè l'angolo $C\widehat{A}B$ è retto ovvero misura $\pi/2$ se ne deduce che l'angolo $A\widehat{B}C$ misura $\pi/3$. In definitiva se facciamo una riflessione rispetto al lato AB del triangolo di partenza otteniamo un triangolo equilatero $BB'C$. Infine siccome la lunghezza di AB è la metà di BB' che misura uno otteniamo

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

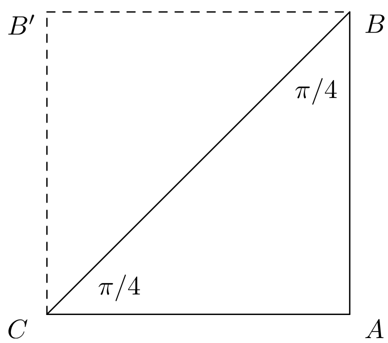
utilizzando poi la prima relazione fondamentale (2.2) si deduce anche

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il lettore può verificare agevolmente che in corrispondenza dell'angolo $\pi/3$ il seno e il coseno si scambiano valore rispetto all'angolo $\pi/6$, risulta infatti,

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Un altro angolo per il quale è possibile calcolare esplicitamente il valore delle funzioni seno e coseno è l'angolo $\pi/4$.



Facendo riferimento alla figura superiore se nel triangolo ABC gli angoli in B e in C misurano $\pi/4$ e l'ipotenusa CB ha lunghezza uno la lunghezza dei due lati AB e AC corrisponde al seno e al coseno di $\pi/4$. D'altronde per il teorema di Pitagora risulta

$$1 = \mid CB \mid^2 = \mid CA \mid^2 + \mid AB \mid^2 = 2 \mid CA \mid^2 = 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2,$$

risolvendo rispetto a $\sin\pi/4$ si ottiene

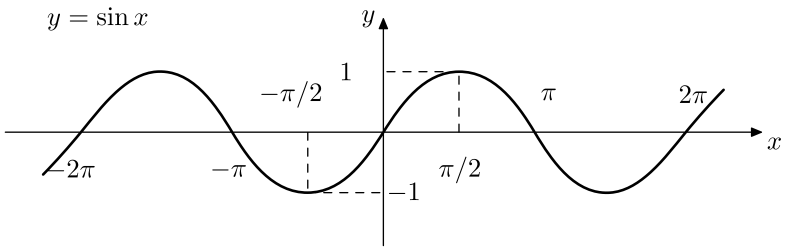
$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

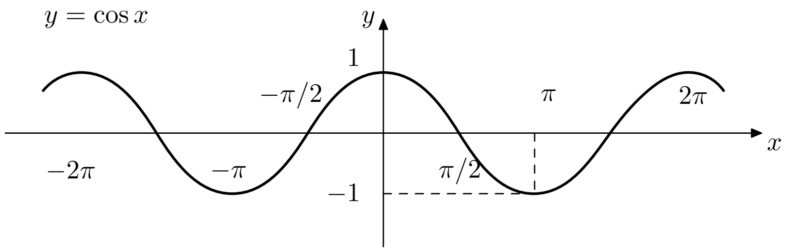
Il grafico delle funzioni

$$\sin : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sin x \in [-1, 1]$$

$$\cos : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \cos x \in [-1, 1],$$

che riportiamo di seguito, si ripete periodicamente in base alle (2.1).

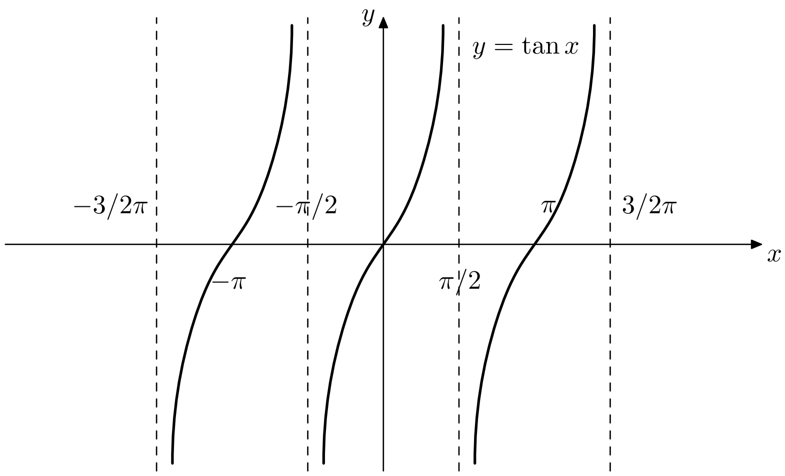




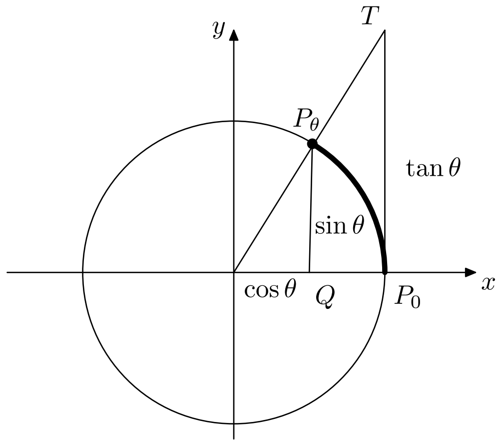
Utilizzando le funzioni seno e coseno è possibile definire una nuova funzione trigonometrica, la funzione tangente,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{2.7}$$

La funzione tangente è definita per $\cos x \neq 0$ ovvero per $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



La funzione tangente può essere interpretata geometricamente sulla circonferenza unitaria.



Osserviamo che dato che i triangoli P_0OT e QOP_θ sono simili risulta ($P_0T = P_0T/P_0O = P_\theta Q/QO = \sin\theta/\cos\theta$), in definitiva dunque la lunghezza del segmento P_0T coincide con la lunghezza della tangente dell'angolo θ. Dalla figura si evince anche che per ogni $0 < \theta < \pi/2$ risulta

$$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta. \tag{2.8}$$

Per terminare il paragrafo osserviamo che dato che risulta

$$\begin{cases} \sin x = -\sin(x+\pi) \\ \cos x = \cos(x+\pi) \end{cases} \tag{2.9}$$

la funzione tangente è periodica di periodo π, risulta dunque per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = \tan(x + k\pi) \tag{2.10}$$

3. Esercizi relativi al capitolo 6.

1. Determinare la misura in radianti degli angoli che espressi in gradi valgono rispettivamente, $2^0, 120^0, 135^0$.

2. Stabilire per quali valori di θ risulta

$$\sin\theta = \frac{1}{2}, \quad \cos\theta = -1, \quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Determinare tutti gli angoli $\theta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sin 3\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad , \tan\theta = 1, \quad \tan\theta = \sqrt{3}$$

4. Calcolare i valori delle funzioni seno, coseno e tangente per i seguenti angoli

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \quad \theta = \frac{5}{12}\pi, \quad \theta = \frac{\pi}{24}$$

5. Verificare che per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ risulta

$$\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta, \quad \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$$

6. Risolvere le seguenti equazioni trigonometriche

$$2\cos^2\theta - 1 = 0, \quad \cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0, \quad \sin^2\theta = \sin 2\theta$$

7. Risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche

$$3 - 4\cos^2\theta > 0, \quad 4\sin\theta\cos\theta + 1 < 0, \quad \sqrt{1 - 2\sin^2\theta} \geq \sqrt{2}\sin\theta + 1$$

8. Risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche

$$\tan\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 2 \geq 0, \quad 3 - \tan^2\theta \leq 0$$

9. Risolvere la seguente equazione trigonometrica

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$$

CAPITOLO 7

Limiti di successioni.

1. Una introduzione storica.

Nel secolo diciassettesimo la matematica occidentale è stata caratterizzata da calcoli con processi infiniti. Gli studiosi dell'epoca per effettuare tali calcoli facevano riferimento a procedimenti intuitivi e non tutti convenivano sul modo di effettuare tali calcoli. La complessità di questi problemi di calcolo è dovuta alla difficolta di operare con processi infiniti. Per dare un'idea del tipo di problemi dibattuti all'epoca citiamo la questione di sommare la serie infinita,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots \tag{1.1}$$

In uno scritto del 1703 il monaco camaldolese Guido Grandi per il calcolo di questa somma infinita utilizzò la serie geometrica (che avremo modo di studiare nei dettagli nei prossimi capitoli)

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^3 \dots$$

che ha per somma

$$\frac{1}{1-x},$$

ottenendo per $x = -1$ il risultato

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots = \frac{1}{2}.$$

A questo punto Grandi prosegue osservando che se si associano nella somma due termini successivi (primo e secondo, terzo e quarto, ...) si ottiene la formula "mistica" e paradossale

$$0 + 0 + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{2}.$$

Sulla questione sollevata da Guido Grandi, Liebniz conviene nel valore attribuito alla somma pur non condividendo le argomentazioni di Grandi. Il risultato della somma in questione è all'epoca di Liebniz oggetto di discussione e il risultato di tale somma è un fatto opinabile. Tutto questo non deve sorprendere dato che fino a quando non si definisce il concetto di somma infinita di numeri il risultato della somma (1.1) rimane una questione aperta. Per arrivare a studiare le serie (somme infinite) introduciamo il concetto di limite che è più semplice e fondamentale. Nella prossima sezione daremo la definizione rigorosa di limite, per ora vogliamo fare un esempio per chiarire il concetto di limite dal punto di vista intuitivo. Consideriamo un esempio estremamante semplice ovvero l'espressione $1/n$. Se in questa espressione sostituiamo, al posto di n, i valori

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

otteniamo

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$$

L'ultima successione si "*avvicina*" tanto più a zero quanto più aumenta il valore di n. Si potrebbe dunque essere tentati di assumere che l'espressione $\frac{1}{n}$ vale proprio zero per $n = \infty$. Il problema con questo tipo di interpretazione è che ∞ non è un numero reale e dunque non possiamo operare con questo numero come con gli altri numeri. Non ha dunque senso dire che n assume valore infinito, si deve pensare invece ad n come ad un numero in divenire che cresce ininterrottamente (assumendo valori finiti sempre più grandi.) In definitiva non possiamo affermare che per qualche valore di n l'espressione $\frac{1}{n}$ assume il valore zero ma possiamo invece affermare che l'espressione $\frac{1}{n}$ si avvicina sempre più a zero quanto più cresce il valore di n. Detto in altri termini, la differenza $\mid \frac{1}{n} - 0 \mid$ al crescere di n finisce per diventare minore di qualsiasi numero prefissato ε. Per fare un esempio fissiamo $\varepsilon = 0.00002$ se vogliamo possiamo fare in modo che la differenza $\mid \frac{1}{n} - 0 \mid$ sia minore di 0.00002, basterà scegliere per esempio $n > 50000$. Naturalmente quanto più è piccolo il valore di ε (ovvero tanto più i termini devono avvicinarsi ad zero) tanto più grande dovr'a essere il valore di n (tanto più dobbiamo dobbiamo andare avanti nei termini della nostra successione). In questo esempio potremo scrivere allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{1.2}$$

questa scrittura va intesa come la prova del fatto che comunque si fissa $\varepsilon > 0$ si riesce a determinare N_ε tale che $\mid \frac{1}{n} - 0 \mid < \varepsilon$ per tutti i valori di n maggiori di N_ε. Nel caso specifico del nostro esempio sarà sufficiente scegliere $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$. In generale la verifica di limite consiste proprio nel determinare una relazione tra ε ed N_ε e cioè fissato ε determinare N_ε tale che per ogni $n > N_\varepsilon$ la differenza tra la successione ed il suo limite sia minore di ε.

2. La definizione di limite.

Il concetto di successione traduce l'idea di sequenza di numeri, come per esempio la sequenza dei numeri naturali $0, 1, 2, 3, \ldots$ oppure la sequenza dei numeri $1, 1/2, 1/3, \ldots$.

DEFINIZIONE 2.1. *Si dice successione una qualunque funzione definita sull'insieme dei numeri naturali e a valori in* $\mathbb{R}$*,*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Per comodità di notazione denoteremo $f(n) = a_n$*.*

Per definire una successione è dunque sufficiente definire il suo elemento ennesimo a_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO 2.1. *Alcuni semplici esempi di successioni sono i seguenti*

$$a_n = \tfrac{n}{n+1} \qquad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \tag{2.1}$$

$$a_n = (-1)^n \qquad -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots \tag{2.2}$$

$$a_n = \tfrac{(-1^n)}{n} \qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1^n)}{n}, \ldots \tag{2.3}$$

$$a_n = n^2 \qquad 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots \tag{2.4}$$

DEFINIZIONE 2.2. *Diremo che la successione* a_n *converge ad* $a \in \mathbb{R}$ *ovvero che* a *é il limite di* a_n *e scriveremo*

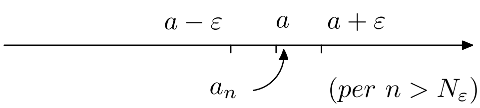
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \tag{2.5}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$*, esiste un numero* N *tale che*

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad (\text{ o che è lo stesso } \mid a_n - a \mid < \varepsilon), \tag{2.6}$$

per ogni $n > N$.

OSSERVAZIONE 2.1. *Vogliamo rimarcare che la definizione di limite interpretata geometricamente sull'asse dei numeri reali asserisce che* comunque *si fissa* $\varepsilon > 0$ *è possibile determinare* N_ε *tale che per* $n > N_\varepsilon$ *(ovvero per tutti i termini che hanno un indice maggiore di* N_ε*) risulta* $a_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$*. Detto in altri termini, comunque si fissa un intorno di* a *dato da* $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ *i termini della successione che hanno un indice maggiore di* N_ε *appartengono a questo intorno.*



A titolo di esempio verifichiamo che la successione (2.1) ha per limite uno. Fissato ε arbitratio, si tratta di dimostrare che esiste N_ε tale che

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n > N_\varepsilon.$$

Dato che $\frac{n}{n+1} < 1$, si cambia il segno all'argomento del valore assoluto e si ottiene

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

che è verificata per $n > 1/\varepsilon - 1$ dunque $N_\varepsilon = 1/\varepsilon - 1$.

Notiamo che non tutte le successioni sono convergenti, negli esempi precedenti la prima e la terza successione sono convergenti, la seconda e la quarta non lo sono come avremo modo di verificare nel seguito. Nel caso in cui una successione risulti convergente il suo limite risulta però univocamente determinato. Interpretando geometricamente la definizione di limite quest'ultimo fatto risulta evidente dato che se una successione a_n avesse due limiti a e b per n grande i suoi termini dovrebbero appartenere sia ad un intorno di a che ad un intorno di b, ma questo è impossibile se i due intorni sono disgiunti.

TEOREMA 2.1. *Il limite di una successione se esiste è unico.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che una successione $\{a_n\}$ abbia due limiti distinti $a \neq b$. Fissiamo $\varepsilon =\mid b - a \mid /2$, per definizione di limite risulta che

$$\begin{aligned} \exists N_1 &: \mid a_n - a \mid < \varepsilon, \ \forall n > N_1 \\ \exists N_2 &: \mid a_n - b \mid < \varepsilon, \ \forall n > N_2. \end{aligned}$$

Se scegliamo ora $N = \max\{N_1, N_2\}$ per $n > N$ le precedenti relazioni valgono entrambe e dunque risulta per la proprietà triangolare del valore assoluto

$$\begin{aligned} \mid b - a \mid =\mid (b - a_n) + \mid (a_n - a) \mid\mid \leq \mid b - a_n \mid + \mid a_n - a \mid = \\ \mid a_n - b \mid + \mid a_n - a \mid < \varepsilon + \varepsilon =\mid b - a \mid . \end{aligned}$$

Da quest'ultima relazione si deduce $\mid b - a \mid < \mid b - a \mid$ che è assurdo e dunque segue la tesi. $\square$

Consideriamo l'insieme numerico costituito dai termini di una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ovvero l'insieme $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, tale insieme sarà detto sostegno della successione. Se il sostegno della successione è limitato diremo che la successione è limitata come avviene per le successioni $(2.1), (2.2), (2, 3)$, la successione (2.2) ad esempio assume i soli valori uno e meno uno. In base a quanto detto possiamo dare la seguente definizione

DEFINIZIONE 2.3. *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali, diremo che tale successione è limitata se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\mid a_n \mid \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vogliamo provare ora che le successioni convergenti sono limitate. Osserviamo che la condizione (2.6) nella definizione di limite è proprio una condizione di limitatezza, l'unico inconveniente è che non vale per tutti i termini della successione ma soltanto per i termini con un indice maggiore di N, questo sarà in ogni caso sufficiente a provare il seguente.

TEOREMA 2.2. *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione convergente, allora tale successione é anche limitata.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $\varepsilon = 1$ nella definizione di limite, esiste allora N tale che

$$a - 1 \leq a_n \leq a + 1 \quad \forall n > N. \tag{2.7}$$

Se a questo punto poniamo

$$M = \max\{a_1, \ldots, a_N, a+1\}$$
$$L = \min\{a_1, \ldots, a_N, a-1\},$$

dato che $a + 1 \leq M$, $L \leq a - 1$ risulta grazie alla condizione (2.7),

$$L \leq a_n \leq M \quad \forall n > N$$

questa stessa condizione d'altronde è verificata anche per $n < N$ infatti evidentemente $L \leq \min\{a_1, \ldots, a_N\}$, $\max\{a_1, \ldots, a_N\} \leq M$ e dunque la tesi. □

Il precedente teorema non si inverte dato che non tutte le successioni limitate sono convergenti (vedi per esempio la successione (2.2)). Le successioni non limitate pur non essendo convergenti possono avere limite infinito.

DEFINIZIONE 2.4.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists N:\ a_n > M,\quad \forall n > N \tag{2.8}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall L < 0,\ \exists N:\ a_n < L,\quad \forall n > N \tag{2.9}$$

Diremo che una successione è converegente se ammette limite finito, viceversa una successione si dice divergente se ammette limite infinito. Una successione convergente a zero la diremo infinitesima, una successione divergente la diremo infinita. Il lettore può agevolmente verificare che la successione (2.4) è divergente ed ha limite $+\infty$

3. Operazioni con i limiti

La definizione di limite fornisce il contesto rigoroso di verifica per trattare con le successioni. Per sviluppare viceversa uno strumento rapido di calcolo che non costringa a fare riferimento ogni volta alla definizione sono necessari alcuni risultati che consentono di operare algebricamente con i limiti di successioni.

Proposizione 3.1. *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *successioni convergenti e sia*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R},$$

allora risulta

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b \tag{3.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \qquad\qquad (\text{se } b_n, b \neq 0) \tag{3.3}$$

Dimostrazione. La dimostrazione della (3.1) è la più semplice. Per ipotesi, per definizione di limite per ogni $\varepsilon > 0$ risulta che

$$\exists N_1 : \ \forall n > N_1 \ \mid a_n - a \mid < \varepsilon \tag{3.4}$$

$$\exists N_1 : \ \forall n > N_2 \ \mid b_n - b \mid < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Dunque per $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ otteniamo, utilizzando la proprietà triangolare del valore assoluto

$$\begin{aligned} &\mid (a_n + b_n) - (a + b) \mid = \mid (a_n - a) + (b_n - b) \mid \leq \\ &\mid a_n - a \mid + \mid b_n - b \mid < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Data l'arbitrarietà di ε la (3.1) è provata. Per provare la (3.2) utilizzeremo la limitatezza delle successioni convergenti. Dato che $\{a_n\}$ è convergente, per il Teorema 2.2 esiste un numero reale $M > 0$ tale che

$$\mid a_n \mid \leq M \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Dalle ipotesi di convergenza (3.4), (3.5) si deduce che per ogni $n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$\begin{aligned} &\mid a_n b_n - ab \mid = \mid a_n b_n - a_n b + a_n b - ab \mid = \\ &= \mid a_n(b_n - b) + b(a_n - a) \mid \leq \mid a_n \mid\mid b_n - b \mid + \mid b \mid\mid a_n - a \mid < \\ &< M\varepsilon + \mid b \mid \varepsilon = (M + \mid b \mid)\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Per la dimostrazione della (3.3) si procede in maniera analoga.

□

La proposizione precedente può essere generalizzata anche al caso in cui i limiti di $\{a\}_n$ e $\{b_n\}$ sono divergenti. Per esempio se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$. Indicheremo sinteticamente questo fatto scrivendo per semplicità di scrittura soltanto $+\infty \pm b = +\infty$. **Rimarchiamo esplicitamente che dal punto di vista algebrico la scrittura $+\infty \pm b = +\infty$ non ha nessun significato**, dato che $+\infty$ non è un numero reale e dunque non valgono per esso le proprietà algebriche valide per i numeri reali. Utilizzeremo però ugualmente questa notazione sintetica per denotare che se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$. Utilizzando questa convenzione abbiamo che se a e b sono numeri reali risulta

$$a \pm \infty = \pm\infty \qquad\qquad \pm\infty \pm \infty = \pm\infty$$

$$\pm\infty \cdot b = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } b > 0 \\ \mp\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0$$

Il lettore può agevolmente verificare la validità delle regole sopra enunciate. In alcuni casi le operazioni con i limiti conducono a forme indeterminate. In questi casi non è possibile a priori calcolare il valore del limite ma si deve procedere caso per caso. Risultano indeterminate le seguenti forme

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Se un limite si presenta in forma indeterminata non vuol dire che il limite non esiste. Consideriamo il seguente esempio dove si presenta una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$.

$$\begin{aligned}(3.8) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0\end{aligned}$$

In questo caso il limite esiste ed è zero. Viceversa possiamo considerare un altro esempio di forma indeterminata dello stesso tipo che ha per risultato un limite infinito.

$$(3.9) \qquad \lim_{n\to\infty} (n+1)^2 - n^2 = \lim_{n\to\infty} 2n + 1 = +\infty$$

Si possono inoltre fare esempi di forme indeterminate per le quali il limite non esiste.

4. Limiti notevoli

In questa sezione calcoleremo alcuni limiti che si presentano in forma indeterminata e che hanno un particolare interesse per lo sviluppo della teoria. Utilizzeremo per questo calcolo alcuni teoremi di confronto.

TEOREMA 4.1 (Permanenza del segno). *Sia $\{a_n\}$ una successione convergente ad un limite positivo*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0,$$

allora tale successione risulta definitivamente positiva, ovvero esiste $N > 0$ tale che

$$a_n > 0 \qquad\qquad \forall n > N.$$

DIMOSTRAZIONE. Applicando la definizione di limite con la scelta di $\varepsilon = a/2$ si ottiene che esiste $N > 0$ tale che

$$-\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2} \qquad\qquad \forall n > N,$$

e dunque dalla prima disequazione ricaviamo come volevamo dimostrare

$$0 < \frac{a}{2} < a_n \qquad\qquad \forall n > N.$$

□

Nel caso di una successione $\{a_n\}$ che ha limite negativo vale un risultato analogo al precedente e cioè risulta definitivamente $a_n < 0$. Dal teorema appena dimostrato si deduce immediatamente il seguente Corollario.

COROLLARIO 1. *Sia $\{a_n\}$ una successuine costituita da numeri non negativi, $a_n \geq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, e sia*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a,$$

allora necessariamente risulta $a \geq 0$.

Evidentemente infatti non può essere $a < 0$ altrimenti, per il teorema della permanenza del segno sarebbe definitivamente $a_n < 0$. Dal Corollario precedente ne segue immediatamente un altro.

COROLLARIO 2. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

se risulta $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $a \geq b$.

La dimostrazione del Corollario 2 è immediata, è sufficiente infatti applicare il Corollario 2 alla successione $b_n - a_n$. Il teorema successivo é una generalizzazione del precedente e ci consentirà di calcolare alcuni limiti notevoli.

OSSERVAZIONE 4.1. *Il lettore può verificare agevolmente che il Corollario 2 vale anche nel caso di limiti infiniti, ovvero se $a_n \geq b_n$ e $b_n \to +\infty$ allora $a_n \to +\infty$.*

Teorema 4.2 (dei Carabinieri). *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ successioni tali che risulti*

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno lo stesso limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = a,$$

allora anche la successione c_n è convergente e risulta

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Dimostrazione. Per definizione di limte, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due numeri positivi N_1 (relativo alla successione $\{a_n\}$) ed N_2 (relativo alla successione $\{b_n\}$) tali che

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \ \ \forall n > N_1 \qquad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \ \ \forall n > N_2. \tag{4.2}$$

Se $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ entrambe le condizioni (4.2) sono rispettate e utilizzando le condizioni (4.1) otteniamo

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon,$$

ovvero $\mid c_n - c \mid < \varepsilon$ per ogni $n > N$ e dunque la tesi. □

Un ultimo risultato che utilizzeremo spesso per il calcolo dei limiti il seguente.

Proposizione 4.1. *Sia $\{a_n\}$ una successione limitata e sia $\{b_n\}$ una successione tale che*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

allora la successione prodotto $\{a_n \cdot b_n\}$ converge anche lei a zero,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$$

La dimostrazione della precedente proposizione è agevole ed è lasciata come esercizio per il lettore. La sua utilità è evidente in presenza di successioni limitate che non ammettono limite. Consideriamo il seguente semplice esempio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

in questo caso l'applicazione della Proposizione 4.1 (si considera $a_n = \sin n$, $b_n = 1/n$) molto utile dato che non si pu applicare la Proposizione 3.1 sulle operazioni con i limiti. Nel seguito di questa sezione raccogliamo alcuni limiti notevoli che si calcolano utilizzando i risultati finora provati. Utilizzeremo talvolta anche la seguente osservazione di verifica immediata.

osservazione 4.2. *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, allora risulta*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mid a_n \mid = 0 \tag{4.3}$$

ESEMPIO 4.1. *Sia $a \in \mathbb{R}$, allora risulta*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & se \;\; a > 1 \\ 1 & se \;\; a = 1 \\ 0 & se \;\; -1 < a < 1 \\ non\ esiste & se \;\; a \leq -1 \end{cases} \tag{4.4}$$

La verifica di questo primo limite è estremamente semplice ed è lasciata come esercizio per il lettore. Rileviamo che una volta verificato, utilizzando la definizione di limite, che $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ per $a > 1$, è agevole verificare $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ per $-1 < a < 1$. Infatti se $-1 < a < 1$ risulta $\frac{1}{|a|} > 1$ e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \mid a^n \mid = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/\mid a \mid)^n} = 0.$$

ESEMPIO 4.2. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, di verifica meno semplice è il seguente limite notevole.*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \tag{4.5}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostreremo la (4.5) per semplicità nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$, negli altri casi si procede in modo simile. Utilizzeremo la disuguaglianza di Bernoulli, ricordiamo che per $x > -1$ ed $n \in \mathbb{N}$ risulta $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Poniamo $b_n = \sqrt[n]{n^{1/2}} - 1$, risulta allora $b_n \geq 0$ e utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli otteniamo

$$\sqrt{n} = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n, \tag{4.6}$$

e dunque

$$0 \leq b_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \tag{4.7}$$

Applicando il teorema dei carabinieri si deduce

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{1/2}} - 1 = 0$$

e dunque come volevamo dimostrare

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{1/2}} = 1.$$

La dimostrazione effettuata funziona allo stesso modo per ogni $0 < \alpha < 1$. Con alcuni accorgimenti poi ci si può ricondurre per α qualsiasi al caso $\alpha = 1/2$. □

Utilizzando il risultato appena dimostrato il lettore può dedurre come esercizio che per $a > 0$ fissato risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{4.8}$$

Utillizzare ad esempio nel caso $a > 1$ la disuguaglianza $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ valida per $n > a$. Come applicazione del teorema dei carabinieri ricaviamo alcuni limiti notevoli relativi alle funzioni trigonometriche.

ESEMPIO 4.3. *Sia $\{a_n\}$ una qualsiasi successione tale che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{4.9}$$

allora risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sin a_n = 0 \tag{4.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos a_n = 1. \tag{4.11}$$

DIMOSTRAZIONE. Preliminarmente osserviamo che siccome per ipotesi risulta $a_n \to 0$ possiamo determinare un valore $N > 0$ tale che

$$-\frac{\pi}{2} < a_n < \frac{\pi}{2} \qquad \forall n > N.$$

Per i valori di n maggiori di N si deduce allora $0 \leq\mid a_n \mid\leq \pi/2$ e utilizzando la disuguaglianza (2.8) del Capitolo 6 otteniamo

$$0 \leq\mid \sin a_n \mid= \sin \mid a_n \mid\leq\mid a_n \mid \qquad \forall n > N, \tag{4.12}$$

e dunque per l'osservazione 4.2 e per il teorema dei carabinieri otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \mid \sin a_n \mid= 0,$$

e sempre per l'osservazione 4.2 si deduce la (4.10). Per ottenere la (4.11) si deve osservare preliminarmente che in generale se $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una qualsiasi successione tale che $b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ per la quale risulta $b_n \to 1$ allora risulterà anche $\sqrt{b_n} \to 1$. Basta poi definire per $n > N$ $b_n = 1-\sin^2 a_n$, allora risulta $b_n \to 1$ e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \cos a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-\sin^2 a_n} = 1$$

□

Il prossimo limite notevole relativo alle forme trigonometriche si presenta nella forma indeterminata 0/0.

ESEMPIO 4.4. *Sia $\{a_n\}$ una qualsiasi successione tale che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.13}$$

allora risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \tag{4.14}$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzeremo la (2.8) del Capitolo 6, che riportiamo di seguito per agevolare la lettura

$$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta, \qquad \forall\ 0 < \theta < \pi/2$$

dividendo per θ otteniamo

$$0 < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 < \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \forall\ 0 < \theta < \pi/2$$

e passando dunque agli inversi

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1, \qquad \forall\ \ 0 < \theta < \pi/2. \tag{4.15}$$

Rileviamo che la relazione appena ottenuta è valida anche per $-\pi/2 < \theta < 0$ infatti $\cos\theta = \cos -\theta$ e $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin -\theta}{-\theta}$. Procedendo come nell'esempio precedente possiamo determinare un valore $N > 0$ tale che

$$| \ a_n \ |< \frac{\pi}{2} \qquad \forall n > N.$$

Applicando dunque la (4.15) per i valori di $\theta = a_n$ otteniamo

$$\cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \qquad \forall \ \ n > N,$$

e infine passando al limite per $n \to \infty$ e applicando il teorema dei carabinieri ricaviamo la (4.14) □

Riassumiamo schematicamente i limiti notevoli calcolati che utilizzeremo nel seguito. Sia $\{a_n\}$ una succesione qualsiati tale che $a_n \to 0$, allora

$$\sin a_n \to 0, \qquad \cos a_n \to 1, \tag{4.16}$$

Se inoltre $a_n \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ allora,

$$\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1. \tag{4.17}$$

5. Il numero di Nepero e

In questa sezione studieremo le proprietà delle successioni monotone, soffermandoci sulla definizione del numero di Nepero e.

Definizione 5.1. *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, allora*

$$a_n \text{ è crescente } \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} a_n \le a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

$$a_n \text{ è decrescente } \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} a_{n+1} \le a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5.2}$$

Se una delle due condizioni (5.1) o (5.2) è verificata con le disuguaglianze strette diremo che a_n è strettamente crescente o strettamente decrescente. Se una delle due condizioni (5.1) o (5.2) è verificata diremo che la successione $\{a_n\}$ è monotòna.

esempio 5.1. *Un esempio elementare di successione monotòna decrescente è dato dalla successione $\{1/n\}$. Infatti risulta*

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad n < n+1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il risultato fondamentale sulle successioni monotone è contenuto nel seguente teorema.

Teorema 5.1. *Tutte le successioni monotone ammettono limite. Tutte le successioni monotone limitate sono convergenti.*

Dimostrazione. Proviamo che una succcessione crescente e limitata è convergente. Denotiamo con l l'estremo superiore dell'insieme

$$A = \{a_n : \quad n \in \mathbb{N}\},$$

che esiste finito dato che la successione $\{a_n\}$ è limitata. Per le proprietà dell'estremo superiore, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un elemento di A che denotiamo con $a_{\bar{n}}$ tale che

$$l - \varepsilon < a_{\bar{n}}.$$

Essendo poi la successione crescente, per $n > \bar{n}$ risulta $a_{\bar{n}} \le a_n$ e dunque

$$l - \varepsilon < a_{\bar{n}} \le a_n \le l < l + \varepsilon, \qquad \forall n > \bar{n} \tag{5.3}$$

e cioè per definizione di limite $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Nel caso poi che la successione sia decrescente e limitata si procede allo stesso modo. Se la successione $\{a_n\}$ risulta crescente ma non limitata allora dalla non limitatezza si deduce che per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$a_n > M \qquad \forall n > N,$$

ovvero per definizione di limite $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. □

Applichiamo il precedente Teorema alla successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{5.4}$$

Verifichiamo dunque che la successione (5.4) è crescente e limitata. Iniziamo a verificare che è crescente, ovvero che per $n \geq 2$ risulta

$$a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = a_n, \tag{5.5}$$

effettuando il minimo comune multiplo la precedente disuguaglianza diventa,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n},$$

ovvero semplificando ulteriormente

$$\frac{n-1}{n} \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n},$$

che possiamo scrivere in maniera equivalente

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n} \geq 1 - \frac{1}{n}. \tag{5.6}$$

Le disuguaglianze (5.5) e (5.6) sono equivalenti, la (5.6) daltronde è sempre verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$ dato che segue dalla disuguaglianza di Bernoulli che riportiamo per comodità

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq -1, \tag{5.7}$$

scegliendo $x = -1/n^2$. Per verificare che la successione (5.4) è limitata faremo vedere che la successione

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{5.8}$$

è decrescente. La limitatezza di a_n discenderà poi dal fatto che a_n è più piccola di b_n, infatti evidentemente risulta

$$a_n < \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n. \tag{5.9}$$

Per verificare che b_n è decrescente si deve provare che

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n} = b_{n-1} \qquad \forall n \geq 2, \tag{5.10}$$

ovvero equivalentemente effettuando il minimo comune multiplo

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n},$$

e cioè ancora

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n} > 1 + \frac{1}{n}. \tag{5.11}$$

La (5.11) discende dalla disuguaglianza di Bernoulli (5.7) applicata con $x = 1/(n^2 - 1)$ infatti risulta

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n},$$

dove si è applicata la disuguaglianza $n/(n^2 - 1) > 1/n$ nell'ultimo passaggio.

Riassumendo, dato che $\{a_n\}$ è crescente e $\{b_n\}$ è decrescente abbiamo ottenuto

$$a_1 \leq a_n < b_n < b_1 \qquad \forall n \geq 2, \tag{5.12}$$

e dunque essendo $a_1 = 2$ e $b_1 = 4$,

$$2 \leq a_n < 4 \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.13}$$

La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e limitata e dunque per il Teorema 5.1 questa successione ammette limite. Il limite di tale successione viene detto numero di Nepero e si denota con la lettera e, dunque abbiamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{5.14}$$

Volendo una stima per il valore numerico di e si può utilizzare la seguente osservazione. Siano $n, m \in \mathbb{N}$ e sia $k = \max\{n, m\}$ allora dal fatto che $\{a_n\}$ è crescente e $\{b_n\}$ è decrescente, utilizzando anche la (5.9) si deduce che

$$a_n \leq a_k < b_k \leq b_m, \tag{5.15}$$

ovvero

$$a_n < b_m \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}. \tag{5.16}$$

Così ad esempio per $m = 7$ si ottiene

$$a_n < b_7 = \left(\frac{8}{7}\right)^8 = 2.91\ldots.$$

Scegliendo valori sempre più grandi per il numero m si ottengono stime numeriche sempre più precise per il numero e. A titolo di curiosità riportiamo le prime cifre decimali del numero e.

$$e = 2.718281828459$$

6. Infiniti di ordine crescente

In questa ultima sezione di questo capitolo studieremo alcune successioni divergenti di tipo standard. Lo strumento che adotteremo per il confronto di queste successioni è il seguente criterio del rapporto.

TEOREMA 6.1 (Criterio del rapporto). *Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi e si consideri la successione ottenuta facendo il rapporto di due termini consecutivi,* $b_n = a_{n+1}/a_n$.

$$\text{(6.1)} \qquad \textit{Se} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = l < 1, \quad \textit{allora} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

$$\text{(6.2)} \qquad \textit{Se} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = l > 1, \quad \textit{allora} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo la (6.1), la dimostrazione della (6.2) si ottiene in maniera analoga. Se applichiamo il teorema della permanenza del segno alla successione $1 - b_n$ possiamo concludere che esiste N tale che $b_n < 1$, $\forall n > N$ e dunque $a_{n+1}/a_n < 1$, $\forall n > N$ ovvero $a_{n+1} < a_n$, $\forall n > N$. La successione $\{a_n\}$ risulta monotòna e dunque convergente per i criteri visti nel precedente paragrafo. Denotiamo con a il limite della successione $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a,$$

dato che $\{a_n\}$ è una successione a termini positivi risulta $a \geq 0$. Se per assurdo non fosse $a = 0$ allora risulterebbe

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1,$$

ma questo è in contraddizione con l'ipotesi (6.1) e dunque $a = 0$. □

Applicheremo il precedente criterio allo studio delle seguenti successioni

$$\text{(6.3)} \qquad \log n; \quad n^\alpha; \quad a^n; \quad n!; \quad n^n.$$

I parametri α ed a sono scelti in maniera tale che le successioni siano tutte divergenti a $+\infty$, dunque $a > 1, \alpha > 0$. Proveremo che le successioni a sinistra divergono più lentamente di quelle alla loro destra, sono dunque disposte in ordine crescente. Faremo vedere infatti che risulta,

$$\text{(6.4)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Lo studio del primo dei quattro limiti è rimandato ai prossimi capitoli. Per quanto riguarda il secondo limite poniamo

$$\text{(6.5)} \qquad a_n = \frac{n^\alpha}{a^n}; \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{a},$$

risulta allora

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{a} < 1,$$

e dunque per il criterio del rapporto si ottiene

$$\text{(6.6)} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

Per il terzo limite poniamo

$$a_n = \frac{a^n}{n!}; \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1}, \tag{6.7}$$

risulta allora

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0 < 1,$$

e dunque per il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{6.8}$$

Infine per quanto riguarda il quarto limite poniamo

$$a_n = \frac{n!}{n^n}; \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}, \tag{6.9}$$

risulta allora

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{e} < 1,$$

e dunque sempre per il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \tag{6.10}$$

□

7. Esercizi relativi al capitolo 7.

1. Dire quali tra le seguenti successioni risultano monotone e motivare la risposta con una dimostrazione

$$\{n^2 - n\}; \quad \{n + \frac{4}{n}\}; \quad \{\log_{1/2} n\}.$$

2. Provare utilizzando la definizione di limite che risulta

$$\lim_{n\to+\infty} n - 5\cos n = +\infty; \ \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{3-n} = -1.$$

3. Provare che se $\{a_n\}$ è divergente allora

$$\lim_{n\to+\infty} \mid a_n \mid = +\infty,$$

cosa di può affermare del viceversa?

4. Sia $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, provare che esiste una successione di punti di A che ha come limite $\sup A$.

5. Utilizzando la definizione di limite verificare che risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{3 + \frac{1}{n^2+1}} = \sqrt{3}; \ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n^2} = \ln\sqrt{e}$$

6. Utilizzando la definizione di limite provare che se $\{a_n\}$ è una successione limitata e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ allora,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

7. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n + \log n + \sqrt{n}}{n + \cos n + 1},$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n - \sqrt[n]{n^2} + \ln n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + n^4 \sin n + \log n}{n^5 + \cos n}.$$

CAPITOLO 8

Funzioni continue

In questo capitolo trattiamo la fondamentale nozione di continuità, a questo scopo è necessario estendere alle funzioni di variabile reale la definizione di limite.

1. Limiti di funzioni

La definizione di limite per le funzioni di variabile reale può essere data indipendetemente dalla definizione di limite che abbiamo dato per le successioni oppure può essere formulata in termini di limiti di successioni. Esiste un legame tra i due approcci che successivamente analizzeremo. Consideriamo una funzione

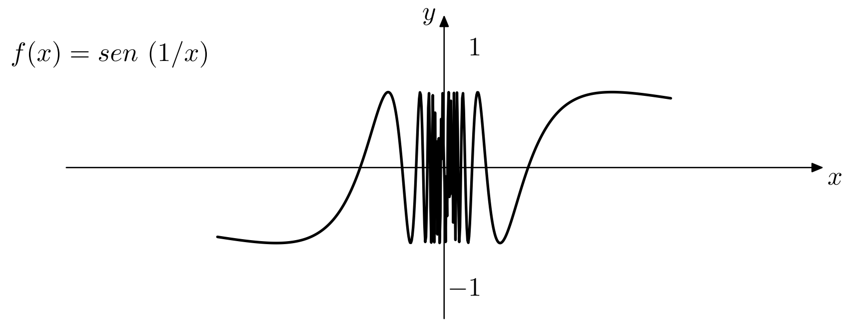
$$f :]a, b[\setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

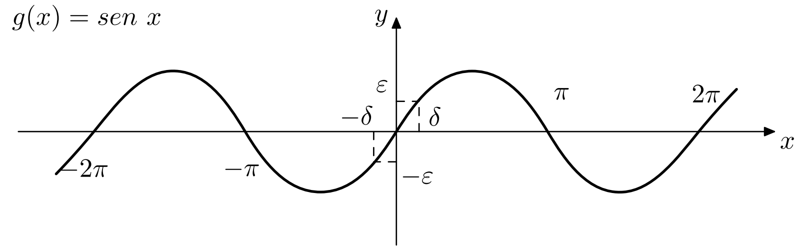
siamo interessati a studiare il comportamento della funzione $f(x)$ per i valori dell'asscissa x che sono prossimi ad x_0. Osserviamo esplicitamente che la funzione $f(x)$ può anche non essere definita nel punto x_0 e infatti la nostra attenzione si concentra attorno al punto x_0 ma non nel punto x_0 stesso. Per illustrare graficamente il concetto di limite facciamo riferimento a due situazioni dal comportamente differente. Studiamo il comportamento delle seguenti funzioni in un intorno del punto $x_0 = 0$.

$$f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to sen(1/x) \in [-1, 1], \tag{1.2}$$

$$g : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to sen\ x \in [-1, 1]. \tag{1.3}$$

Rimarchiamo ancora una volta che il concetto di limite non coinvolge il valore della funzione nel punto x_0. L'espressione della seconda funzione $g(x)$ potrebbe essere calcolata anche nel punto $x_0 = 0$ ma l'abbiamo definita al di fuori di zero per mettere in risalto ancora una volta che il concetto di limite di funzione per x che tende ad x_0 non richiede che la funzione sia definita in x_0 ma solo attorno ad x_0. Riportiamo il grafico delle funzioni in esame per evidenziare la differenza del comportamento attorno all'origine di f e g.





La funzione $f(x) = \sin(1/x)$ non ha un comportamento regolare attorno all'origine, se facciamo variare x facendogli assumere valori sempre piú prossimi allo zero i corrispondenti valori $f(x)$ non si stabilizzano bensì oscillano tra -1 ed 1. La funzione $g(x) = \sin x$ viceversa ha un comportamento regolare attorno all'origine nel senso che i suoi valori $g(x)$ si stabilizzano verso il valore zero per x che si muove verso l'origine. La prima funzione $f(x) = \sin(1/x)$ non ammette limite per x tendente a zero. Viceversa la seconda funzione $g(x) = \sin x$ ha come limite zero per x tendente a zero infatti comunque fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un intorno dell'origine $]-\delta, \delta[$ nel quale $\varepsilon < \sin x < \varepsilon$ ovvero in formule risulta che (vedi figura),

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ : \ \ \text{se } -\delta < x < \delta, \ \ \text{allora } -\varepsilon < \sin x < \varepsilon,$$

ovvero sinteticamente

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ : \mid x \mid < \delta \implies \mid \sin x \mid < \varepsilon.$$

Possiamo dunque dare la seguente definizione di limite per le funzioni.

Definizione 1.1. *Sia data* $f :]a, b[\setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *diremo che la funzione* f *ha limite* $l \in \mathbb{R}$ *per* x *che tende ad* x_0 *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \tag{1.4}$$

se e soltanto se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ : \ 0 < \mid x - x_0 \mid < \delta \implies \mid f(x) - l \mid < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Verificare un certo limite utilizzando la definizione appena data vuol dire che per ogni ε si deve dimostrare che esiste $\delta > 0$ (dipendente da ε) con la proprietà che se $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ allora $| f(x) - l |< \varepsilon$.

ESEMPIO 1.1. *Per fare un esempio semplice consideriamo la funzione* $f(x) = \sqrt{| x |}$ *e verifichiamo che*

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{| x |} = 0.$$

Fissato dunque $\varepsilon > 0$ *arbitrario si deve determinare* $\delta > 0$ *tale che* $\sqrt{| x |} < \varepsilon$ *per* $x \in] - \delta, \delta[$. *Risolvendo l'equazione* $\sqrt{| x |} < \varepsilon$ *si ottiene* $| x |< \varepsilon^2$ *ovvero* $-\varepsilon^2 < x < \varepsilon^2$ *e dunque il valore di* $\delta = \varepsilon^2$.

Come preannunciato la definizione 1.1. di limite non è l'unica possibile. Presentiamo infatti una ulteriore definizione di limite che dimostreremo essere equivalente alle definizione 1.1.

DEFINIZIONE 1.2. *Sia data* $f :]a, b[\setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *diremo che la funzione* f *ha limite* $l \in \mathbb{R}$ *per* x *che tende ad* x_0 *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \tag{1.6}$$

se e soltanto se

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l, \quad \text{per ogni successione } \{a_n\} \text{ tale che,} \tag{1.7}$$
$$a_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0.$$

Nel seguito sarà comodo poter scegliere quale definizione utilizzare a seconda della convenienza, è necessario però dimostrare che le due definizioni sono tra di loro equivalenti.

TEOREMA 1.1. *Le definizioni 1.1 ed 1.2 sono equivalenti. Sia data infatti*

$$f :]a, b[\setminus \{x_0\} \to \mathbb{R},$$

la condizione (1.5) *è equivalente alla condizione* (1.7). *Per comodità di lettura riportiamo le condizioni* (1.5), (1.7).

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ : \ 0 <| x - x_0 |< \delta \implies | f(x) - l |< \varepsilon. \tag{1.5}$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l, \quad \text{per ogni successione } \{a_n\} \text{ tale che,} \tag{1.7}$$
$$(\ a_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che (1.5) $\implies$ (1.7). Assumendo dunque l'ipotesi (1.5) dobbiamo far vedere che per ogni successione come nella (1.7) risulta $f(a_n) \to l$. Per definizione di limite di successione dovremo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice N_ε tale che

$$| f(a_n) - l |< \varepsilon, \tag{1.8}$$

per ogni $n > N_\varepsilon$ Osserviamo che la condizione $| f(x) - l |< \varepsilon$ é verificata grazie all'ipotesi (1.5) per i valori di x tali che $| x - x_o |< \delta$ e dunque per avere la (1.8) si tratta di assicurarsi che risulti $\mid a_n - x_o \mid < \delta$. Se ricordiamo daltronde che la succeccione $\{a_n\}$ é stata scelta come in (1.7) e dunque verifica

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = x_0$$

se applichiamo la definizione di limite alla successione $\{a_n\}$ fissando $\varepsilon = \delta$ otteniamo che esiste N_ε tal che

$$\mid a_n - x_0 \mid < \delta,$$

per ogni $n > N_\varepsilon$ e dunque grazie all'ipotesi (1.5) come giá osservato vale la (1.8) e dunque la (1.7) é provata.

Viceversa proviamo che (1.7) $\Longrightarrow$ (1.5). La dimostrazione di questa implicazione procede per assurdo. Assumiamo dunque per assurdo che la (1.5) sia falsa ovvero assumiamo che risulti che

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ tale che } \ \forall \delta > 0 \ \exists\ x \text{ tale che risulti,}$$

$$\mid x - x_0 \mid < \delta, \ \mid f(x) - l \mid > \varepsilon. \tag{1.9}$$

La negazione della (1.5) sopra enunciata asserisce che per ogni fissato $\delta > 0$ esiste un x dipendente da $\delta > 0$ per il quale siano verificate le condizioni (1.9). Dato che δ é arbitrario scegliamo per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$, $\delta = 1/n$, in corrispondenza di tale valore di δ per la negazione della (1.5) esiste un valore di x che denoteremo con x_n (per evidenziare la dipendenza da n) tale che

$$\mid x_n - x_0 \mid < \frac{1}{n}, \ \mid f(x_n) - l \mid > \varepsilon. \tag{1.10}$$

La (1.10) comporta in particolare che $x_0 - 1/n < x_n < x_0 + 1/n$ ovvero

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0,$$

e dunque per la $(1, 7)$ applicata alla successione $\{x_n\}$ dovrebbe risultare

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l,$$

e per definizione di limite dovrebbe esistere N_ε tale che per $n > N_\varepsilon$ risulti $\mid f(x_n) - l \mid < \varepsilon$ ma questo é in evidente contraddizione con la (1.10) che stabilisce esattamente il contrario. La contraddizione é provata e dunque l'ipotesi di partenza ovvero la negazione della (1.5) non puó essere vera e cio'e la (1.5) é vera. $\square$

Le definizioni 1.1 ed 1.2 riguardano il caso di limiti calcolati per x che tende ad un valore finito x_o e con valore del limite l finito. Per completezza riportiamo le ovvie generalizzazioni di tali definizioni nel caso che i valori x_o, l risultino infiniti.

DEFINIZIONE 1.3. *Sia data*

$$f :]a,b[\to \mathbb{R}$$

con a, b *eventualmente uguali a* $-\infty, +\infty$ *rispettivamente. Si danno le seguenti definizioni*

$$(1.11)\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall\ x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0 \implies f(x_n) \to +\infty;$$

$$\iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 : f(x) > M,$$
$$\forall x :\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$(1.12)\quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = l \iff \forall\ x_n \to +\infty \implies f(x_n) \to l;$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists k > 0 : | f(x) - l | < \varepsilon,$$
$$\forall x : x > k.$$

Si possono infine definire i limiti da destra rispetto ad un punto x_0 *nel modo seguente*

$$(1.13)\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \iff \forall\ x_n \to x_0,\ x_n > x_0 \implies f(x_n) \to l;$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : | f(x) - l | < \varepsilon,$$
$$\forall x :\ x_0 < x < x_0 + \delta$$

$$(1.14)\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \iff \forall\ x_n \to x_0,\ x_n < x_0 \implies f(x_n) \to l;$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : | f(x) - l | < \varepsilon,$$
$$\forall x :\ x_0 - \delta < x < x_0.$$

2. Il calcolo dei limiti di funzioni (esempi e proprietá elementari).

In questa sezione e nelle prossime ci occuperemo del calcolo dei limiti a partire da casi elementari fino a giungere ai casi piú complessi. Dato che disponiamo di due possibili definizioni di limite tra di loro equivalenti, evidenziamo con alcuni esempi le circostanze che rendono vantaggioso applicare una o l'altra definizione. Supponiamo di voler provare che risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0. \tag{2.1}$$

In questo caso ricorrendo alla definizione di limite (del tipo (1.11)) si deve verificare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k > 0 \ :\left| \left(\frac{1}{2}\right)^x \right| < \varepsilon, \ \forall x > k,$$

essendo $(1/2)^x > 0$ si puó eliminare il valore assoluto, e dunque si deve verificare che

$$\exists k > 0 \ : \left(\frac{1}{2}\right)^x < \varepsilon, \ \forall x > k. \tag{2.2}$$

Risolvendo la disequazione si ottiene

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \varepsilon \Longleftrightarrow x > \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon,$$

e dunque la (2.2) é verificata per $x > k = \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon$. In generale per i limiti in forma esponenziale vale il seguente schema che il lettore puó verificare per esercizio.

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{negli altri casi} \end{cases} \tag{2.3}$$

Analogamente si puó verificare agevolmente utilizzando al definizione 1.2 che risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \tag{2.4}$$

Viceversa consideriamo un esempio di verifica di limite che é comodo effettuare utilizzando la definizione con le successioni. Supponiamo dunque di voler provare che

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0. \tag{2.5}$$

La verifica di questo limite é agevole con entrambe le definizioni. Se peró utilizziamo la definizione 1.2 con le successioni possiamo evitare qualsiasi calcolo riconducendoci ai risultati giá provati. Ricordiamo infatti che la (4.14) del Capitolo 7 garantisce che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$$

per ogni successione a_n tale che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \qquad a_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da ció si deduce per definizione 1.2 di limite la validitá della (2.4). Allo stesso modo il lettore puó verificare che

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

La definizione 1.2 di limite di funzione data con le successioni consente dunque di gettare un ponte che rende validi per funzioni i limiti notevoli provati nei paragrafi 4,5,6 del Capitolo 7. Valgono dunque i seguenti limiti notevoli.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \tag{2.6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2.7}$$

La definizione 1.2 é infine particolarmente utile quando si vuole provare la non esistenza di un determinato limite. Supponiamo ad esempio di voler verificare che

$$\text{non esiste} \quad \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}. \tag{2.8}$$

Sará allora sufficiente determinare due successioni x_n, y_n convergenti a zero per le quali risulti

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{x_n} \neq \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{y_n}.$$

Consideriamo dunque la successione $x_n = 1/(n\pi)$ che evidentemente converge a zero per $n \to +\infty$ e valutiamo i valori che la funzione $\sin 1/x$ assume in corrispondenza di x_n,

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0.$$

Analogamente definiamo $y_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$ che é una successione convergente a zero per $n \to +\infty$, in questo caso risulta

$$\sin\frac{1}{y_n} = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1.$$

Risulta dunque,

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{x_n} = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{y_n}.$$

In contrasto con la richiesta della definizione 1.2. Il lettore puó verificare analogamente per esercizio che non esistono i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x; \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos x.$$

3. Operazioni con i limiti.

In questa sezione proveremo alcuni teoremi fondamentali per il calcolo dei limiti. Il primo risultato che proveremo riguarda le operazioni con i limiti. Come esempio introduttivo consideriamo il calcolo del seguente limite,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x} = ...\end{aligned}$$

Nei primi tre passaggi abbiamo scritto la funzione limite in una maniera equivalente che in modo da far comparire il limite notevole (2.7) Per procedere oltre nella precedente espressione é necessario utilizzare un teorema che ci consenta di calcolare nell'ultimo passaggio il limite del prodotto come prodotto di limiti ottenendo cosí a seguire dall'espressione precedente

$$\begin{aligned}... &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

In generale vale il seguente teorema sulle operazioni con i limiti

Teorema 3.1 (Operazioni con i limiti di funzioni). *Siano* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *e* $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ *successioni convergenti nel punto* $x_0 \in]a,b[$ *e sia*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b, \qquad \text{con } a,b\in\mathbb{R},$$

allora risulta

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = a+b \tag{3.1}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = a\cdot b \tag{3.2}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \qquad (\text{se } b\neq 0) \tag{3.3}$$

Dimostrazione. La dimostrazione é immediata a partire dalla proposizione 3.1. del Capitolo 7 e utilizzando la definizione 1.2. di limite. Proviamo ad esempio che il limite di una somma é uguale alla somma dei limiti. Supponiamo dunque che risulti $f(x) \to a$; $g(x) \to b$ per $x \to x_0$. Per definizione questo comporta che qualunque sia la successione x_n convergente ad x_0 e tale che $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta $f(x_n) \to a$, $g(x_n) \to b$. Per la proposizione 3.1. del Capitolo 7 applicata alle successioni $f(x_n), g(x_n)$, risulta $f(x_n) + g(x_n) \to a + b$ e dunque la prova é completa riapplicando la definizione 1.2. □

Il prossimo teorema, di importanza fondamentale per il calcolo dei limiti consente di effettuare i cambiamenti di variabile nell'argomento dei limiti.

Illustriamo con un esempio la tecnica di cambiamento di variabile all'interno di un limite. Supponiamo di voler calcolare il seguente limite,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}.$$

La variabile (x^2-1) all'interno del precedente limite converge a zero per x che tende ad 1 e dunque sarebbe utile sostituirla con una nuova variabile y convergente a zero con la posizione $y = x^2 - 1$. Il limite precedente si trasforma in tal modo in un limite notevole immediato.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1.$$

Il prossimo teorema garantisce la correttezza delle sostituzioni di variabili del tipo appena visto. Vale dunque il seguente teorema.

TEOREMA 3.2 (Limiti di funzioni composte). *Siano date due funzioni*

$$f :]a,b[\to]c,d[, \qquad g :]c,d[\to \mathbb{R},$$

tali che risulti,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \qquad \lim_{y\to y_0} g(y) = l, \tag{3.4}$$

con $x_0 \in]a,b[$ *ed* $y_0 \in]c,d[$. *Inoltre assumiamo che,*

$$\exists\ \delta > 0\ :\ f(x) \neq y_0, \quad \forall\ x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}. \tag{3.5}$$

Allora vale la seguente uguaglianza,

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y) = l. \tag{3.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una generica successione $x_n \in]a,b[$ convergente ad x_0, tale che $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per definizione di limite di successione esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $| x_n - x_0 | < \delta$ per ogni $n > N$. Dunque per $n > N$ risulta $f(x_n) \neq y_0$. La successione $y_n = f(x_n) \in]c,d[$ é dunque una successione convergente ad y_0 e tale che $y_n \neq y_0$ per $n > N$ e dunque per la seconda delle (3.4) risulta $g(y_n) \to l$, ovvero $g(f(x_n)) \to l$. Dato l'arbitrarietá della successione di partenza x_n resta provata la (3.6). $\square$

ESEMPIO 3.1. *Il lettore provi a verificare per esercizio, utilizzando il teorema sul limite delle funzioni composte, il teorema sulle operzioni con i limiti il limite notevole* (2.6) *ed i limite notevole,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{3.7}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/2}.$$

Suggerimento: *si aggiunga e si sottragga* 1 *nella parentesi tonda e se moltiplichi e si divida per* $\cos x - 1$ *l'esponente della parentesi.*

4. La continuitá.

In questa sezione studiamo il concetto fondamentale di continuitá. Introduciamo immediatamente la definizione seguente.

DEFINIZIONE 4.1. *Sia data* $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ *diremo che la funzione* f *é continua nel punto* $x_0\in]a,b[$ *se e soltanto se risulta*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \tag{4.1}$$

ovvero per definizione di limite se e solo se

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ :\ 0<\mid x-x_0\mid<\delta\implies\mid f(x)-f(x_0)\mid<\varepsilon. \tag{4.2}$$

Il concetto di continuitá puó essere interpretato in molti modi, una prima osservazione sulla continuitá consiste nel fatto che in un punto di continuitá il calcolo del limite si riduce al semplice calcolo del valore della funzione nel punto in questione. La definizione di continuitá puó essere inoltre riscritta nel seguente modo che ne evidenzia la utilitá per le apllicazioni al calcolo dei limiti.

$$f \text{ é continua} \iff \lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x). \tag{4.3}$$

La definizione di continuitá riscritta nella versione (4.3) puó essere riletta come regola di calcolo che consente di invertire, per una funzione f continua in x_0, l'operazione di limite con la funzione.

ESEMPIO 4.1. *Come primo esempio verifichiamo che la funzione* $\sin x$ *é continua per ogni* $x_0\in\mathbb{R}$. *Calcoliamo dunque il limite*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\sin x &= \lim_{h\to 0}\sin(x_0+h)\\ &= \lim_{h\to 0}(\sin x_0\cos h+\cos x_0\sin h)\\ &= \sin x_0\lim_{h\to 0}\cos h+\cos x_0\lim_{h\to 0}\sin h=\sin x_0.\end{aligned}$$

La funzione $\sin x$ risulta continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$. Osserviamo che nella prima riga abbiamo applicato il teorema sulle funzioni composte effettuando la sostituzione $x=x_0+h$ mentre nel passaggio dalla prima alla seconda abbiamo applicato il teorema sulle operazioni con i limiti. Analogamente si puó verificare che la funzione $\cos x$ é continua in ogni punto $x_0\in\mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 4.1. *Le funzioni elementari finora studiate risultano tutte continue nel loro insieme di definizione. La verifica di questo risultato sará fatta nella sezione riguardante la continuitá delle funzioni monotone. Nel seguito assumeremo dunque la continuitá delle funzioni potenza ad esponente reale, esponenziale, logaritmo ....*

ESEMPIO 4.2. *Come esempio di applicazione della continuitá calcoliamo un limite notevole rimasto in sospeso nella sezione* 6 *del capitolo* 7*.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \log \sqrt[n]{n} = \log \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \log 1 = 0. \tag{4.4}$$

Si osservi che oltre la continuitá della funzione log *é stato applicato il limite notevole* (4.5) *del capitolo* 7*. A partire dal limite precedente si ottiene poi*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/b \log n^b}{n^b} = 0, \qquad \forall b \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Come applicazione immediata dei teoremi sulle operazioni con i limiti e del teorema sulle funzioni composte segue la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 4.1. *Siano f, g funzioni continue. La somma il prodotto e il rapporto (se il denominatore non si annulla) delle funzioni f, g é ancora una funzione continua. La funzione composta (ammesso che esista la composta) di f, g é una funzione continua.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione é immediata utilizzando i teoremi 3.1 e 3.2 della sezione precedente. □

Applichiamo i risultati finora ottenuti per calcolare alcuni limiti notevoli.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1, \tag{4.6}$$

nella seconda uguaglianza é stata applicata la continuitá della funzione $\ln x$ e nella terza il limite notevole (2.6).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1, \tag{4.7}$$

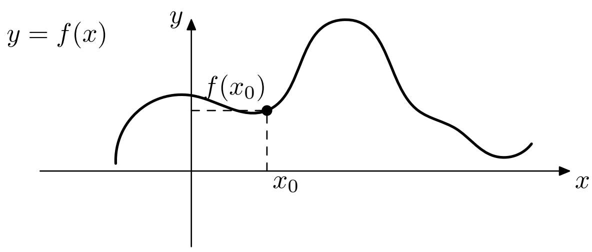
avendo utilizzato la sostituzione $x = \ln(1+y)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1} = \alpha \lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha y} \cdot \frac{y}{e^y - 1} = \alpha. \tag{4.8}$$

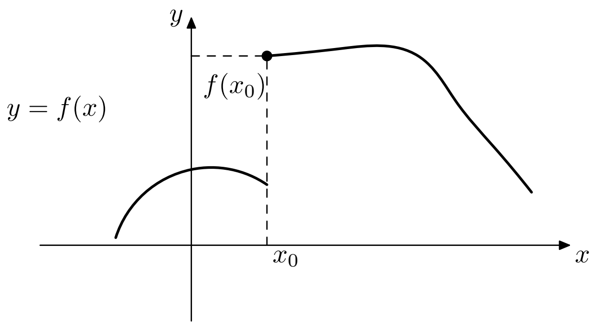
Nella prima uguaglianza é stata utilizzata la sostituzione $x = e^y - 1$ e nell'ultima il limite notevole (4.7).

5. Discontinuitá

In questa sezione analizzeremo da un punto di vista geometrico il concetto di continuitá e la sua assenza. Sará utile nel corso della nostra indagine pensare ad una funzione $f(x)$ che rappresenti un parametro fisico di un esperimento cosí da collegare l'idea di continuitá con qualcosa di esperibile empiricamente. Immaginiamo dunque di registrare sull'asse delle x il trascorrere del tempo e sull'asse delle y la temperatura $f(x)$ rilevata da una sonda posta nel cratere del vesuvio all'istante variabile x. In una giornata ordinaria l'andamento della funzione $f(x)$ sará del tipo illustrato dalla seguente figura.



In condizioni normali la funzione $f(x)$ che registra le temperature risulterá continua in ogni istante, ovvero per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Dal punto di vista dell'esperimento questo vuol dire che in un istante prossimo all'istante x_0; "*nei minuti che precedono l'istante x_0 ed in quelli che seguono l'istante x_0*"; la temperatura $f(x)$ all'istante x si discosta pochissimo dal valore $f(x_0)$ della temperatura all'istante x_0. Dal punto di vista del disegno del grafico di $f(x)$ la continuitá si traduce nella proprietá qualitativa di non spezzarsi. Il grafico di $f(x)$ si presenta dunque senza strappi o salti. Immaginiamo viceversa; viaggiando a ritroso nel tempo; di ripetere idealmente l'esperimento nel giorno del 79 d.C in cui avvenne la piú celebre eruzione del vesuvio. In questo caso si puó immaginare che l'andamento della temperatura sia descritto da una funzione del tipo illustrato nella nuova figura.

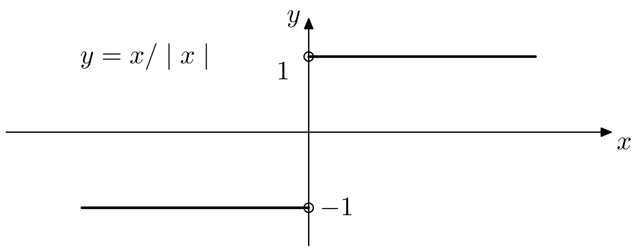


Questa volta la funzione $f(x)$ che registra le temperature risulta discontinua nel punto x_0. Il valore di $f(x)$ subito prima dell'istante dell'eruzione

x_0 é molto diverso dal valore $f(x_0)$, il grafico della funzione presenta un salto nel punto x_0. In questa sezione presentiamo una classificazione standard delle possibili discontinuitá di una funzione. Una discontinuitá con un salto del tipo di quella rappresentata nella figura precedente la diremo discontinuitá di prima specie. Il prototipo della discontinuitá di prima specie é rappresentato dalla seguente funzione

$$f(x) = \frac{x}{|\, x \,|} \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Tale funzione é continua per $x \neq 0$ mentre non é continua per $x = 0$.

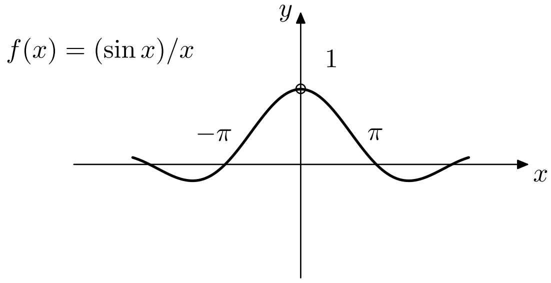


Definizione 5.1. *La funzione $f(x)$ presenta in x_0 una discontinuitá di prima specie se esistono finiti e distinti il limite destro ed il limite destro,*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x). \tag{5.2}$$

In base alla precedente definizione la funzione $\frac{x}{|x|}$ presenta dunque nell'origine una discontinuitá di prima specie. Nella classificazione standard un altro tipo di discontinuitá meritevole di definizione é costituito dalle discontinuitá eliminabili. Per fare un esempio consideriamo la seguente funzione,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{5.3}$$



Tale funzione é continua in tutti i punti tranne che nell'origine, infatti risulta verificato

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{5.4}$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ tranne che per $x_0 = 0$ dato che f non é definita in zero. Osserviamo peró che il limte della precedente funzione nell'origine esiste e infatti risulta

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

La mancata continuitá della funzione $f(x)$ nel punto zero non é dovuta al fatto che il limite nella (5.4) non esiste per $x_0 = 0$ ma al fatto che non é possibile calcolare $f(0)$. Viene spontaneo allora definire una nuova funzione $\bar{f}$ ottenuta estendendo la precedente anche nel punto zero, nel modo seguente

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Questa nuova funzione risulterá continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ infatti questa volta risulta

$$\lim_{x \to 0} \bar{f}(x) = \bar{f}(0) = 1.$$

In casi come questo si dice che la funzione $f(x)$ presenta una discontinuitá eliminabile nel punto zero e la funzione $\bar{f}(x)$ viene detta prolungamento per continuitá della funzione $f(x)$.

Definizione 5.2. *Sia $f :]a, b[\backslash x_0 \to \mathbb{R}$ e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

allora si dice che la funzione $f(x)$ presenta una discontinuitá eliminabile nel punto x_0 e la funzione $\bar{f}(x)$ definita su tutto l'intervallo $]a, b[$ ponendo

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{se } x \in]a, b[\backslash \{x_0\} \\ l & \textit{se } x = x_0 \end{cases} \tag{5.6}$$

viene detta prolungamento per continuitá di $f(x)$ nel punto x_0.

Gli altri casi possibili di discontinuitá vengono detti discontinuitá di seconda specie.

Definizione 5.3. *La funzione $f(x)$ presenta una discontinuitá di seconda specie nel punto x_0 se almeno uno dei due limiti*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

non esiste oppure é infinito.

6. Proprietá fondamentali delle funzioni continue

Come abbiamo avuto modo di capire nella sezione precedente le funzioni continue non fanno "salti", sono quelle funzioni che si possono tracciare senza staccare la penna dal foglio. I primi teoremi che dimostriamo in questa sezione precisano ulteriormente questa idea. Il primo teorema che incontriamo é il teorema della permanenza del segno.

TEOREMA 6.1 (Permanenza del segno). *Sia* $f(x)$ *definita in* $]a,b[$ *e continua nel punto* $x_0 \in]a,b[$. *Se* $f(x_0) > 0$ *esiste un numero* $\delta > 0$ *tale che*

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\tag{6.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Analogamente al caso delle successioni (vedi Teorema 4.1 del capitolo 7) scegliamo $\varepsilon = f(x_0)/2$ nella definizione di limite. Esiste allora $\delta > 0$ tale che $\mid f(x) - f(x_0) \mid < f(x_0)/2$ per ogni x tale che $\mid x - x_0 \mid < \delta$ e dunque in particolare

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \qquad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

□

Il precedente teorema conferma l'idea di una funzione continua come una funzione che non salta infatti puó essere riassunto dicendo che se una fuznione continuá é positiva in un punto non puó trovarsi negativa improvvisamente ma rimane positiva in un intorno di quel punto. Il prossimo teorema completa il quadro della continuitá da un punto di vista geometrico e infatti stabilisce un risultato del tutto prevedibile per i grafici che non si spezzano. Se un grafico che non si spezza deve congiungere un punto ad altezza positiva con un punto ad altezza negativa necessariamente esiste un punto in cui il grafico transita a quota zero. In termini di funzioni continue vale il seguente.

TEOREMA 6.2. *Sia f(x) una funzione continua nell'intervallo* $[a,b]$. *Se* $f(a) < 0$ *e* $f(b) > 0$, *allora esiste un punto* $x_0 \in]a,b[$ *tale che*

$$f(x_0) = 0 \tag{6.2}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione procede per suddivisioni successive dell'intervallo $[a,b]$ alla ricerca della soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Denotiamo dunque con c il punto medio dell'intervallo $[a,b]$, ovvero poniamo $c = (a+b)/2$. Nel caso in cui $f(c) = 0$ abbiamo trovato una soluzione della (6.2) e la dimostrazione é conclusa. Se cosí non é si presentano due casi

$$\begin{cases} \text{se } f(c) > 0 & \text{poniamo} \quad a_1 = a,\ b_1 = c \\ \text{se } f(c) < 0 & \text{poniamo} \quad a_1 = c,\ b_1 = b. \end{cases} \tag{6.3}$$

Tra i due intervalli in cui il punto c suddivide l'intervallo di partenza abbiamo denotato con $[a_1, b_1]$ quello in cui risulta nuovamente $f(x)$ negativa nell'estremo sinistro e positiva nell'estremo destro. In base alla (6.4) risulta infatti $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Inoltre l'ampiezza dell'intervallo $[a_1, b_1]$ é metá del precedente infatti risulta, $b_1 - a_1 = (b-a)/2$. Suddividiamo poi l'intervallo $[a_1, b_1]$ mediante il punto medio $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ e ripetiamo il ragionamento. Otteniamo in questo modo tre successioni a_n, b_n, c_n definite ricorsivamente per $n \geq 1$ dalla posizione

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{se } f(c_n) > 0 \text{ poniamo} & a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = c_n \\ \text{se } f(c_n) < 0 \text{ poniamo} & a_{n+1} = c_n,\ b_{n+1} = b_n \\ & c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}. \end{array} \right. \tag{6.4}$$

Nel caso in cui per qualche valore di n risulta $f(c_n) = 0$ si é trovata una soluzione della (6.2) e la dimostrazione é conclusa. In alternativa restano determinate due successioni $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ per le quali risulta per costruzione

$$f(a_n) < 0, \qquad f(b_n) > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

La successione $\{a_n\}$ é crescente per costruzione mentre $\{b_n\}$ é decrescente, inoltre entrambe risultano limitate poiché contenute nell'intervallo $[a, b]$. Per il teorema 5.1 sulle successioni monotone (vedi capitolo 7) entrambe le successioni risultano convergenti. Denotiamo con x_0 il limite di $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0. \tag{6.6}$$

Osserviamo poi che l'ampiezza dell'intervallo $[a_n, b_n]$ si ottiene dimezzando n volte quella dell'intervallo $[a, b]$,

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \implies b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}. \tag{6.7}$$

Passando al limite nella precedente relazione si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = x_0. \tag{6.8}$$

Finalmente dunque per la continuitá della funzione $f(x)$ e utilizzando le condizioni (6.5) e il teorema della permanenza del segno (corollario 1, sezione 4 capitolo 7) otteniamo

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq 0; \qquad f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0 \tag{6.9}$$

e dunque $f(x_0) = 0$. □

Naturalmente il teorema continua a valere anche se $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. La dimostrazione appena effettuata fornisce un metodo costruttivo per approssimare le soluzioni di un'equazione. Per fare un'esempio concreto determiniamo una soluzione dell'equazione

$$\sin x = 3x - 3 \tag{6.10}$$

con una precisione superiore a 0.5. Dobbiamo dunque determinare un numero che dista meno di 0.5 da una soluzione dell'equazione. Consideriamo la funzione $g(x) = \sin x - 3x + 3$ che risulta continua su tutto $\mathbb{R}$. Le soluzione dell'equazione (6.10) sono gli zeri della funzione $g(x)$. Osserviamo che

$$g(1) = \sin 1 > 0, \qquad g(2) = \sin 2 - 3 < 0.$$

Per il teorema degli zeri $g(x)$ si annulla in un punto $x_0 \in]1, 2[$. Se consideriamo il punto medio $c = 3/2$, questo dista da x_0 meno di 0.5 e dunque $x = 1.5$ é una soluzione approssimata dell'equazione (6.10) con un errore inferiore a 0.5. Volendo aumentare il grado di precisione della soluzione non resta che continuare a suddividere l'intervallo di partenza. Ad esempio se vogliamo una soluzione della (6.10) con un errore inferiore a 0.25 é sufficiente osservare che $g(3/2) < 0$ e dunque sempre per il teorema degli zeri esiste una soluzione della (6.10) nell'intervallo $]1, 3/2[$. Il punto medio di questo intervallo $c_1 = 1.25$ dista meno di 0.25 da una soluzione dell'equazione e dunque é una soluzione approssimata dell'equazione (6.10) con un errore inferiore a 0.25. Per avere un grado di precisione comunque piccolo é sufficiente ripetere piú volte la suddivisione. Un conseguenza imediata ma interessante del precedente teorema é il seguente.

Teorema 6.3 (Primo teorema dei valori intermedi). *Sia f(x) una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$, allora $f(x)$ ammette tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.*

Dimostrazione. Per fissare le idee supponiamo che $f(a) \leq f(b)$. Dobbiamo verificare che, per ogni $y_0 \in [f(a), f(b)]$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$. Se $f(a) = y_0$ oppure $f(b) = y_0$ la tesi é provata scegliento $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$ rispettivamente. Supponiamo dunque che risulti $f(a) < y_0 < f(b)$ e definiamo la funzione

$$g(x) = f(x) - y_0 \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{6.11}$$

Dato che la funzione $g(x)$ é continua e che risulta $g(a) = f(a) - y_0 < 0$ e $g(b) = f(b) - y_0 > 0$, possiamo applicare il teorema degli zeri e dunque esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $g(x_0) = 0$ e dunque $f(x_0) = y_0$. □

Il prossimo teorema, dovuto a Weierstrass é uno dei teoremi piú importanti sulle funzioni continue. Non effettueremo la sua dimostrazione ma analizzeremo in dettaglio il ruolo delle ipotesi affinché il teorema sia vero.

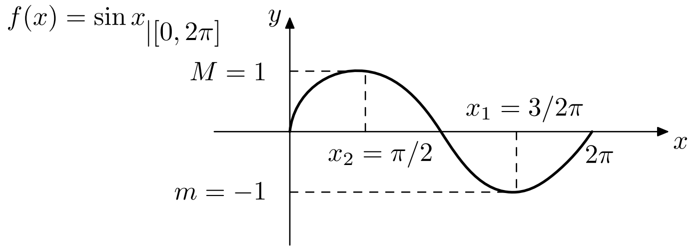
Teorema 6.4 (Weierstrass). *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ ammette massimo e minimo in $[a, b]$ e dunque esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{6.12}$$

Diremo punti di minimo e massimo per $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ i valori x_1, x_2. I conrrispondenti valori $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ saranno detti minimo e massimo di $f(x)$ in $[a, b]$. Per comprendere il ruolo giocato dall'ipotesi di continuitá nel teorema di Weierstrass consideriamo il seguente esempio.

Consideriamo la funzione $f(x)$, restrizione della funzione $\sin x$ all'intervallo $[0, 2\pi]$,

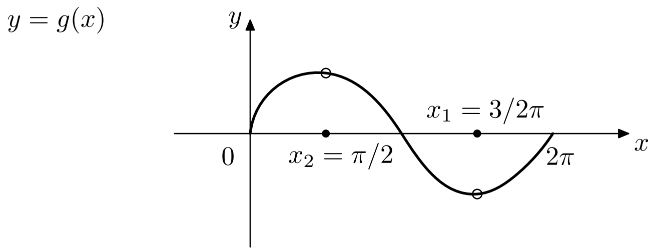
$$f(x) : x \in [0, 2\pi] \to \sin x \in [-1, 1], \tag{6.13}$$



La funzione $f(x)$ é continua e dunque ammette un minimo ed un massimo rispettivamente nei punti $\pi/2$ e $3/2\pi$. Naturalmente peró se modifichiamo la precedente funzione proprio nei punti $\pi/2$ e $3/2\pi$ e poniamo ad esempio

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \in [0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\} \\ 0 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } x = \frac{3}{2}\pi \end{cases} \tag{6.14}$$

Otteniamo una nuova funzione che risulta discontinua e che non ammette ne massimo ne minimo.



Risulta infatti che $-1 < g(x) < 1$ e inoltre

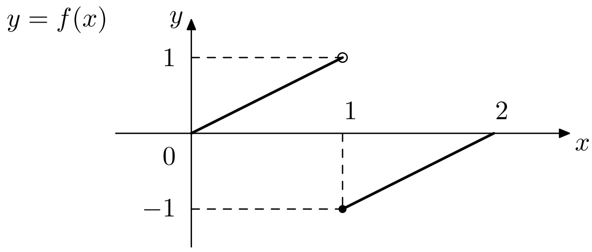
$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in [0, 2\pi] : \; f(x) > 1 - \varepsilon$$

e dunque

$$\sup_{x \in [0,2\pi]} g(x) = 1 \qquad \text{e analogamente} \inf_{x \in [0,2\pi]} g(x) = -1.$$

ma non esistono punti in cui $g(x) = \pm 1$ dato che abbiamo modificato $f(x)$ proprio dove assumeva tali valori. Questo esempio mette in luce il fatto che la condizione di continuitá é indispensabile per l'eistenza di massimi e minimi. Il precedente esempio potrebbe peró sembrare artificioso dato che é ottenuto modificando una funzione continua. Consideriamo allora un altro esempio di funzione non continua (con discontinuitá non eliminabili) che non ammette massimo.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x - 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \tag{6.15}$$

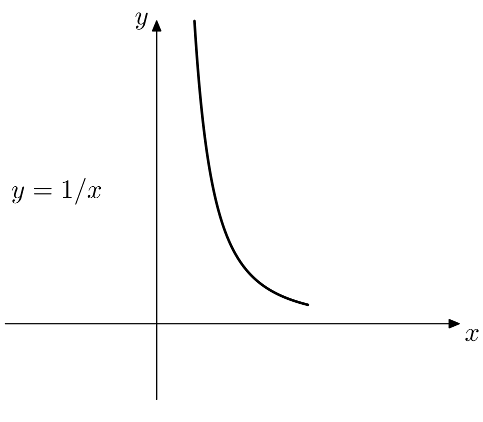


La precedente funzione non ammette massimo infatti risulta

$$\sup_{x \in [0,2]} f(x) = 1$$

ma non esiste il massimo dato che $f(1) = -1$. Nell'ultimo esempio evidenziamo che nel teorema di Weierstrass oltre l'ipotesi di continuitá anche l'ipotesi sul dominio della funzione risulta determinante. Affinche sia garantita l'esistenza di minimi e massimi il dominio di $f(x)$ deve infatti essere sia chiuso che limitato. Consideriamo infatti la funzione

$$f(x) : x \in]0, +\infty[\to \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$$



La funzione $f(x) = 1/x$ risulta si continua ma é definita su un intervallo ne chiuso (l'estremo sinistro zero non appartiene all'insieme di definizione) ne limitato. Tale funzione non ammette ne minimo ne massimo infatti risulta

$$\inf_{x\in]0,+\infty[} f(x) = 0; \qquad \sup_{x\in]0,+\infty[} f(x) = +\infty,$$

e non esiste alcun punto in cui sia $f(x) = 0$. Utilizzando poi il teorema di Weierstrass possiamo provare una versione migliorata del primo teorema dei valori intermedi.

TEOREMA 6.5 (Secondo teorema dei valori intermedi). *Sia f(x) una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$, allora $f(x)$ ammette tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si effettua in maniera analoga alla dimostrazione del primo teorema dei valorin intermedi. Per cominciare si osserva che i valori minimo e massimo m e M sono assunti in base al teorema di Weierstrass. Resta da verificare che, per ogni $y_0 \in]m, M[$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$. Denotiamo con x_1 ed x_2 i punti di minimo e massimo della funzione $f(x)$, per fissare le idee assumiamo $x_1 < x_2$, allo stesso modo si procede nell'altro caso. Dato che risulta $m < y_0 < M$ la funzione definita ponendo

$$g(x) = f(x) - y_0 \qquad \forall x \in [a, b], \tag{6.16}$$

assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[x_1, x_2]$, infatti $g(x_1) = m - y_0 < 0$ e $g(x_2) = M - y_0 > 0$, possiamo applicare il teorema degli zeri e dunque esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $g(x_0) = 0$ e dunque $f(x_0) = y_0$. □

L'ultimo teorema di questa sezione riguarda la continuitá delle funzioni inverse

TEOREMA 6.6. *Sia $f(x)$ una funzione strettamente monotòna in $[a, b]$, allora $f(x)$ é invertibile. Inoltre $f(x)$ é continua se e solo se*

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)], \tag{6.17}$$

e in tal caso risulta continua anche la funzione inversa f^{-1}.

7. Esercizi relativi al capitolo 8

1. Utilizzando la definizione di limite verificare che

$$\lim_{x\to 0} \log_2 (x+2) = 1; \quad \lim_{x\to 0^+} \log_{1/2} x = +\infty$$

2.Verificare che non esiste il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|\, x \,|}; \quad \lim_{x\to +\infty} e^{\sin x}$$

3. Provare che se

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} |\, f(x) \,| = +\infty$$

4. Calcolare se esistono i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 1} \frac{2\sin(x-1)}{x^2-1}; \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2-1}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\sqrt{x+1}}{x}; \quad \lim_{x\to +\infty} e^x - x^2$$

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}; \quad \lim_{x\to 2} \frac{\ln x - 1}{e^{x-3}-e}.$$

5. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} [\ln(e+x)]^{\frac{\alpha}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 3\sin x + 2 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

determinare α in modo tale che f risulti continua.
6. Provare che se $f(x)$ é continua nel punto $x_0 \in]a, b[$ allora $f(x)$ é limitata in un intorno di x_0.
7. Provare che se $f : [0,1] \to [0,1]$ é una funzione continua allora esiste almeno un punto in cui $f(x) = x$ detto punto unito per la funzione $f(x)$. La tesi é ancora vera se $f :]0,1[\to]0, [$?
8. Provare che ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale.
9. Trovare una funzione che soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri e che ammette infiniti zeri nell'intervallo $[a, b]$.
10. Provare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x(1 - \frac{1}{|x|}) & \text{se } \mid x \mid > 1 \end{cases}$$

é continua ed invertibile ma ha inversa discontinua. Osservare che questo non contrasta con il teorema 6.6.

Bibliografia

[G] E. Giusti: Analisi Matematica1 *Bollati Boringhieri*
[MS] P. Marcellini, C. Sbordone: Elementi di Analisi Matematica uno *Liguori Editore*
[T] R. Trudeau: La rivoluzione non euclidea. *Bollati Boringhieri*.