1 Esercizi sulla verifica del limite

1) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2+5x-10}{x-2} = 9$$

Verificare questo limite significa verificare che la disequazione:

$$\left|\frac{x^3-2x^2+5x-10}{x-2} - 9\right| < \varepsilon$$

sia verificata per x che varia in un intorno completo di 2.

Dunque, risolviamo la disequazione scritta:

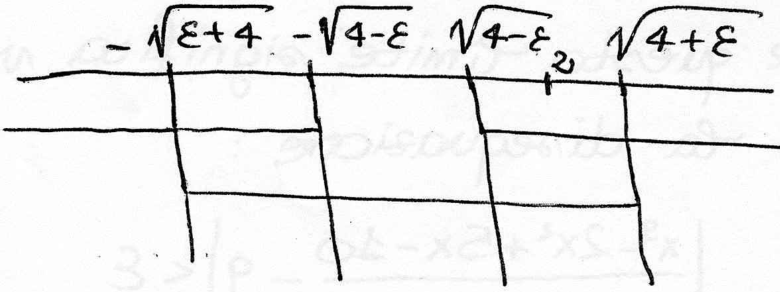
$$\left|\frac{x^3-2x^2+5x-10-9x+18}{x-2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x-2}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{x^2(x-2)-4(x-2)}{x-2}\right| < \varepsilon$$

$$\iff \left|\frac{\cancel{(x-2)}(x^2-4)}{\cancel{x-2}}\right| < \varepsilon \iff |x^2-4| < \varepsilon \iff$$

$$-\varepsilon < x^2-4 < \varepsilon \iff \begin{cases} x^2-4 > -\varepsilon \\ x^2-4 < \varepsilon \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x^2 > -\varepsilon + 4 \\ x^2 < \varepsilon + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -\sqrt{-\varepsilon+4} \cup x > \sqrt{-\varepsilon+4} \\ -\sqrt{\varepsilon+4} < x < +\sqrt{\varepsilon+4} \end{cases}$$



$$-\sqrt{\varepsilon+4} < x < \sqrt{4-\varepsilon} \quad \cup \quad \sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$$

Siccome dovevo verificare che la disequa-
zione data fosse soddisfatta per x appar-
tenente ad un intorno completo di 2, osser-
vo che $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ è un intorno completo
di 2 e quindi il limite è verificato.
Cioè fissato $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta_\varepsilon$, cioè un δ che
dipende da ε e che non importa conoscere
t.c. per x che varia in un intorno completo di 2,
la disequazione è verificata.

② $$\lim_{x \to 2} \frac{x-1}{2-x} = \infty$$

Verificare questo limite signi=fica verificare che la disequazio=ne:

$$\left| \frac{x-1}{2-x} \right| > M$$

sia soddisfatta per x che varia in un intorno completo di 2.

$$\left| \frac{x-1}{2-x} \right| > M \iff \frac{x-1}{2-x} < -M \cup \frac{x-1}{2-x} > M$$

$$\iff \frac{x-1}{2-x} + M < 0 \cup \frac{x-1}{2-x} - M > 0 \iff$$

$$\frac{x-1+2M-Mx}{2-x} < 0 \cup \frac{x-1-2M+Mx}{2-x} > 0 \iff$$

$$\frac{(1-M)x + 2M-1}{2-x} < 0 \cup \frac{(1+M)x - 1 - 2M}{2-x} > 0$$

$$-\begin{cases}(1-M)x+2M-1>0\\ 2-x>0\end{cases} \cup \ ^{+}\begin{cases}(1+M)x-1-2M>0\\ 2-x>0\end{cases}$$

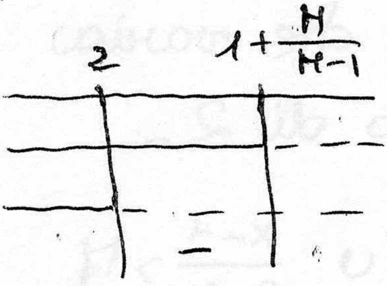
$$-\begin{cases}(M-1)x+1-2M<0\\ x<2\end{cases} \cup \ ^{+}\begin{cases}x>\dfrac{1+2M}{1+M}=1+\dfrac{M}{M+1}\\ x<2\end{cases}$$

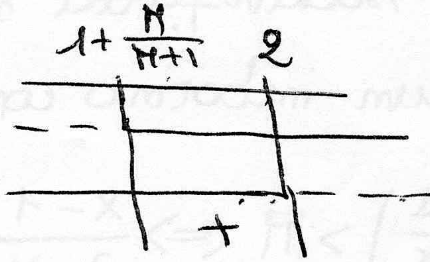
$\overset{\bar{e}<2}{\uparrow}$

$\bar{e}>2$

$\uparrow$

$$-\begin{cases}x<\dfrac{2M-1}{M-1}=1+\dfrac{M}{M-1}\\ x<2\end{cases} \quad ^{+}\begin{cases}x>1+\dfrac{M}{M+1}\\ x<2\end{cases}$$





$$2<x<1+\frac{M}{M-1} \quad \cup \quad 1+\frac{M}{M+1}<x<2$$

Graficando le 2 soluzioni:

troviamo che la diseq. data è verificata per $1+\dfrac{M}{M+1}<x<1+\dfrac{M}{M-1}$ che è un intorno completo di 2, come volevasi

$x > \sqrt{e^{M} - 1}$

Quindi il mio N potrebbe essere proprio la quantità $\sqrt{e^{M}-1}$. E dunque $(\sqrt{e^{M}-1}, +\infty)$ è un intorno di $+\infty$.

Quindi la diseq. data è verificata per un intorno di $+\infty$, come volevo.

(4) $$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$$

Verificare questo limite significa verificare che la disequazione:

$$\sqrt{1-x} > M$$

C.E. di $f(x)$: $1-x \geq 0$

Sia soddisfatta per x che varia in un intorno di $-\infty$.

③ $\lim_{x \to +\infty} \log(x^2+1) = +\infty$

Verificare questo limite significa verificare che la disequazione:

$$\log(x^2+1) > M$$

C.E. di $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R}$

sia soddisfatta per x appartenente ad un intorno di $+\infty$, cioè per $x > N$ con N molto grande e dipendente da M fissato.

(Questa va messa a sistema con il C.E. di $f(x)$)

$$\log(x^2+1) > M \iff \log(x^2+1) > M \log e$$

$$\iff \log(x^2+1) > \log e^M \iff x^2+1 > e^M$$

$$\iff x^2 > e^M - 1 \iff x < -\sqrt{e^M - 1} \cup x > \sqrt{e^M - 1}$$

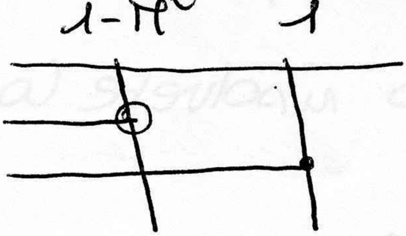
Trascuro questa soluzione perché siamo interessati a valori positivi ($x \to +\infty$)

Quindi ho trovato che:

$$\begin{cases}\sqrt{1-x} > M \\ 1-x \geq 0\end{cases} \qquad \begin{cases}1-x > M^2 \\ x \leq 1\end{cases} \qquad \begin{cases}x-1 < -M^2 \\ x \leq 1\end{cases}$$

→ Potevo anche non mettere questa diseq. nel sistema perché so che $x \to -\infty$ quindi siamo nei negativi e quindi $x \leq 1$ è soddisfatta.

$$\begin{cases}x < 1-M^2 \\ x \leq 1\end{cases}$$



$x < 1-M^2$

Abbiamo dunque verificato che la diseq. di partenza è soddisfatta per x che varia nell'intorno di $-\infty$:

$$(-\infty, 1-M^2)$$

(5)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

Verificare il limite dato significa verificare che la disequazione

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < \varepsilon$$

sia soddisfatta, fissato ε, per x che varia in un intorno di ∞, cioè per

$x < -N \cup x > N$ (o $|x| > N$) con N quantità molto grande che dipende dall' ε fissato.

Dobbiamo risolvere la diseq. data:

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < \varepsilon$$

Osserviamo che $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, quindi $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$, quindi ~~per~~ i valori di x per cui $\frac{1}{|x|} < \varepsilon$ si ha anche che $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < \varepsilon$. Ma

$$\frac{1}{|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \cup x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Ponendo $N = \frac{1}{\varepsilon}$ ho trovato che la dis. di partenza è verificata per x che varia in un intorno di ∞:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$$

6) $$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Verificare questo limite signi= fica verificare che la diseq.

$$|e^{1/x}| < \varepsilon$$

è soddisfatta per x che varia in un intorno sx di 0, cioè del tipo

$$(\delta_\varepsilon, 0)$$

Risolviamola:

$$\begin{pmatrix} e^{1/x} > -\varepsilon \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

$$-\varepsilon < e^{1/x} < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} e^{1/x} > -\varepsilon \\ e^{1/x} < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$e^{1/x} < \varepsilon \Leftrightarrow \log e^{1/x} < \log \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \log \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\log \varepsilon} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{\log \varepsilon}, +\infty\right)$$

Siccome quello trovato non è un intor= no sx di 0, ma un intorno di $+\infty$, =

La scrittura di limite è in partenza errata.

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log (1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \log x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$$

Sia $y=f(x)$ una funzione.

Nel calcolo del $\lim_{x \to c} f(x)$ che si svolge

andando a sostituire c in $f(x)$ si ottengono i seguenti casi:

1) Si trova un valore reale definito.
2) Si trova una forma indefinita ma di immediata interpretazione.
3) Si trova una forma indeterminata.

Adesso calcoliamo alcuni limiti che presentano una forma indeterminata.

LIMITI DI FUNZIONI FRATTE

$\boxed{\text{Caso } \frac{0}{0}}$. In tal caso si possono presentare 3 diversi sottocasi. Dato il limite:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{A(x)}{B(x)} \quad \text{con } \underline{\alpha \text{ finito}}$$

ove $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi di grado n ed m. I sottocasi sono:

1) Se $n<m$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{A(x)}{B(x)} = \infty$

2) Se $n=m$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{A(x)}{B(x)} = l \in \mathbb{R}$

3) Se $n>m$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{A(x)}{B(x)} = 0$

In tutti e tre questi casi l'indeterminazione viene tolta riducendo la frazione ai minimi termini.

$\boxed{\text{Caso } \frac{\infty}{\infty}}$ Anche qui ci sono 3 sottocasi:

1) Se $n<m$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{A(x)}{B(x)} = 0$

2) Se $n=m$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a}{a_1}$ ove a è il coeff. del termine di grado max del polinomio $A(x)$ e a_1 è il coeff. del termine di grado max del polinomio $B(x)$.

3) Se $n>m$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{A(x)}{B(x)} = \infty$

In tutti e 3 i casi α può avere solo un valore ∞ e l'indeterminatezza la si toglie mettendo in evidenza il termine di grado max.

LIMITI DI FUNZIONI IRRAZIONALI

$\boxed{\text{CASO } \frac{0}{0}}$ Si tratta sempre di eliminare l'indeterminazione cambiando la funzione in un'altra avente lo stesso limite. Tale scopo si può raggiungere in 3 modi:

1) mediante razionalizzazione del numeratore o del denominatore o di entrambi;
2) mediante opportune scomposizioni;
3) mediante particolari artifici.

Esempi

(1) $\lim_{x \to 1} \underbrace{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}_{f(x)}$

Trasformo la $f(x)$:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$$

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} =$$

$$\frac{(\cancel{x+2-2x})\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})(\cancel{x-2})} = -\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2} -\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = 0$$

$\boxed{\text{Caso } \frac{\infty}{\infty}}$ Anche qui, come per le funzioni fratte si procede sempre allo stesso modo. Cioè si toglie l'indeterminatezza mettendo in evidenza il termine di grado max.

Esempi

(1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} =$$

Si osservi che al numeratore il termine di grado max è x, perchè $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$. Lo stesso si può dire per il denominatore.

Quindi:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{2\sqrt{x}}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

③ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x^2+1} =$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x^2+1)^3}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[6]{\frac{x^6+1+3x^4+3x^2}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[6]{x^4+\frac{1}{x^2}+3x^2+3} = +\infty$$

$\boxed{\text{Caso } \infty - \infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+6} - x\right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+6} - x\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+5x+6} + x\right)}{\sqrt{x^2+5x+6} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}+5x+6-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x+6}{\sqrt{\;''\;''\;}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(5+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(5+\frac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(5+\frac{6}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1\right)} = \frac{5}{2}$$