LA FISICA È LO STUDIO DEI FENOMENI NATURALI INTORNO A NOI. SI BASA SUL METODO SCIENTIFICO E QUINDI SULL'OSSERVAZIONE DEI FENOMENI, I QUALI PERÒ POSSONO SFOCIARE IN CONCLUSIONI DIVERSE. BISOGNA TROVARE IL "CASO PIÙ GENERICO", OVVERO QUELLO CHE RAPPRESENTA AL MEGLIO IL FENOMENO CHE VOGLIAMO STUDIARE.

ESEMPIO: CADUTA DI UN GRAVE.

UN PEZZO DI GESSO ED UN FOGLIO DI CARTA FATTI CADERE CONTEMPORANEAMENTE DALLA STESSA ALTEZZA NON PRESENTANO LO STESSO COMPORTAMENTO. IL PIÙ GENERALE DEI DUE È IL FOGLIO POICHÉ È MOLTO PIÙ EVIDENTE LA COMPONENTE DELL'ATTRITO CON L'ARIA.

NELL'ANALISI DI UN FENOMENO ABBIAMO BISOGNO DI UN INFINITO NUMERO DI PARAMETRI (ES. SOLE, LUNA, MARTE, ECC. ESERCITANO DELLE FORZE) (BACONE). È IMPOSSIBILE CONOSCERLI TUTTI.

GALILEI: SIAMO ESSERI LIMITATI, PER CUI POSSIAMO CONOSCERE IN MODO APPROSSIMATO. BISOGNA "APPROSSIMARE BENE". NELL'OSSERVAZIONE DI UN FENOMENO, IL TUTTO VA CONSIDERATO IN RELAZIONE ALLE CIRCOSTANZE: IN UNA STANZA LA CADUTA DI UN GRAVE VIENE STUDIATO TRALASCIANDO L'ATTRITO CON L'ARIA; SE LO STESSO ESPERIMENTO È FATTO ALL'ESTERNO IN PRESENZA DI VENTO, L'ARIA DEVE ESSE CONSIDERATA.

PUNTO MATERIALE: CORPO DOTATO DI MASSA MA SENZA FORMA NÉ DIMENSIONI (È L'ANALOGO DEL PUNTO GEOMETRICO, IL QUALE È ANCH'ESSO PRIVO DI FORMA E DIMENSIONI). È UN'ASTRAZIONE FONDAMENTALE IN FISICA: ALCUNI CORPI, PER SEMPLICITÀ, POSSONO ESSERE APPROSSIMATI A PUNTI MATERIALI.

CIRCONFERENZA DELLA TERRA (EQUATORE) = 40'000 km

RAGGIO DELLA TERRA = 6'700 km

UN PEZZO DI GESSO NELLO STUDIO DELLA CADUTA DI UN GRAVE PUÒ ESSERE CONSIDERATO PUNTO MATERIALE POICHÉ RAPPORTATO ALLA TERRA.

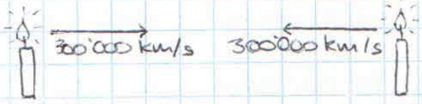
METODO SCIENTIFICO

1. SCHEMATIZZAZIONE:
   SI DEFINISCONO GLI OBIETTIVI DELLO STUDIO, SI VALUTANO GLI ASPETTI PER NOI IMPORTANTI
2. MISURA
   TECNICAMENTE, È L'ASSOCIAZIONE DI NUMERI AI PARAMETRI INDIVIDUATI. DETERMINA L'IMPORTANZA DELLA MATEMATICA. PRECISIAMO CHE NON TUTTO È MISURABILE. ESISTE UNA TAUTOLOGIA IN PROPOSITO SECONDO CUI TUTTO IL "MISURABILE" È PASSIBILE DI INDAGINE SCIENTIFICA. PER MISURARE ABBIAMO BISOGNO DELLE UNITÀ DI MISURA.
   IN FISICA SONO STATE STABILITE TRE GRANDEZZE FONDAMENTALI CHE, OPPORTUNAMENTE COMBINATE TRA LORO, FORNISCONO ALTRE GRANDEZZE. LE TRE GRANDEZZE FONDAMENTALI SONO MASSA, SPAZIO E TEMPO E SONO INDIPENDENTI TRA LORO, OVVERO NON SI INFLUENZANO.
   OVVIAMENTE LE GRANDEZZE E LE RELATIVE UNITÀ DI MISURA DEVONO ESSERE STANDARD.
3. OSSERVAZIONE SPERIMENTALE
   AVENDO LA POSSIBILITÀ DI MISURARE, POSSO QUANTIFICARE DETERMINATI ASPETTI E QUINDI CONSTATARE QUALI EVENTI SI PRESENTANO CON UNA CERTA REGOLARITÀ.
4. ELABORAZIONE DI LEGGI:
   UNA LEGGE AFFERMA CHE, RISPETTATE DETERMINATE CONDIZIONI, SI MANIFESTA UN CERTO EVENTO.
5. PREVISIONI
   GRAZIE ALLA LEGGE FORMULATA È POSSIBILE FARE PREVISIONI
6. VERIFICA
   SE LE PREVISIONI FATTE USANDO LA LEGGE NON SI RIVELANO VERITIERE (ALL'ATTO PRATICO, SPESSO), BISOGNA RIFORMULARE IL TUTTO RIPARTENDO DAL PUNTO 1.

ESEMPIO APPLICAZIONE DEL METODO SCIENTIFICO.

ABBIAMO DUE CORPI IN MOVIMENTO LUNGO UNA STESSA DIREZIONE CON VERSO OPPOSTO, OGNUNO CON UNA CERTA VELOCITÀ. LA VELOCITÀ CON CUI OGNUNO DEI DUE CORPI VEDE AVVICINARE L'ALTRO È PARI ALLA SOMMA DELLE VELOCITÀ DEI DUE CORPI.

OGNUNO DEI DUE TRENI VEDE ARRIVARE L'ALTRO A 200 km/h.



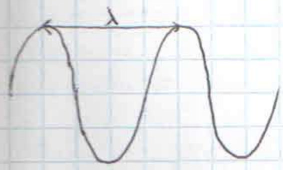
OGNUNO DEI DUE RAGGI DI LUCE "VEDE ARRIVARE L'ALTRO" A 600'000 km/s. IMPOSSIBILE: LA VELOCITÀ MASSIMA È 300'000 km/s! È UN CASO PARTICOLARE, IN CUI IL RISULTATO È 300'000 km/s.

SERVE UNA LEGGE PIÙ GENERALE:

$$\frac{v_1}{1+\frac{v_1^2}{c_1^2}} + \frac{v_2}{1+\frac{v_2^2}{c_2^2}}$$

ESSENDO IL METODO SPERIMENTALE BASATO SULLA MISURA E SU PROCEDIMENTI MATEMATICI, È IMPORTANTE VALUTARE L'ACCURATEZZA. IMMAGINIAMO DI LAVORARE ALL'ORDINE DEL MICRON: $1\mu m = 10^{-6}$ m. SE DOBBIAMO CALCOLARE DOVE ATTERRERÀ UN MISSILE LANCIATO VERSO IL SOLE, SAPENDO CHE LA DISTANZA TERRA-SOLE È DI 150'000'000 km, SI PUÒ COMMETTERE UN ERRORE MASSIMO DI $150'000'000 \cdot 10^{-6} = 150$ m.

DA QUI NASCE ANCHE L'ESIGENZA DI AVERE UNITÀ DI MISURA PIÙ ACCURATE POSSIBILE. PER QUESTIONI DI PRECISIONE E DI REPERIBILITÀ, SI È PASSATO DALLO STANDARD DI METRO IN LEGA DI PLATINO-IRIDIO ALLO STANDARD DI METRO DEFINITO COME LA LUNGHEZZA D'ONDA EMESSA DA UNO SPECIFICO ATOMO DI KRYPTON MOLTIPLICATA PER UN CERTO VALORE COSTANTE, PER POI PASSARE ALLA DEFINIZIONE DI METRO COME LUNGHEZZA D'ONDA DELLA LUCE NEL VUOTO IN UN INTERVALLO DI TEMPO PARI A CIRCA 1/300'000'000 SECONDO.



LA LUCE HA NATURA ONDULATORIA

$1\,m \approx 300'000'000\,\lambda$

$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow c = \lambda \nu$

ESSENDO $\lambda \simeq 0.3-0.7\,\mu m$, CIÒ SPIEGA IL FATTO CHE A LIVELLO OTTICO NON È POSSIBILE VEDERE COSE PIÙ PICCOLE DI λ.

SISTEMI DI MISURAZIONE:

- MKS = METRO-CHILOGRAMMO-SECONDO (ADOTTATO NEL SI)
- CGS = CENTIMETRO-GRAMMO-SECONDO (METODO DI GAUSS)

LA DINAMICA SI OCCUPA DI STUDIARE LE CAUSE CHE GENERANO IL MOTO DI UN CORPO. PER CAPIRE COME IL MOTO VIENE GENERATO BISOGNA AVERE UN CORPO LIBERO, OVVERO UN CORPO SU CUI NON AGISCONO AGENTI ESTERNI (È UN'ESTRAZIONE IDEOLOGICA E NELLA REALTÀ È IMPOSSIBILE DA REALIZZARE).
SECONDO ARISTOTELE UN CORPO LIBERO STA FERMO.

CONSIDERIAMO UN PEZZO DI GESSO SUL TAVOLO. ESSO POTREBBE SEMBRARE UN BUON MODELLO DI CORPO LIBERO. IN REALTÀ CI SONO DIVERSE FORZE CHE AGISCONO SU DI ESSO (GRAVITÀ, REAZIONE VINCOLARE DEL TAVOLO) CHE SI BILANCIANO E FANNO RIMANERE IL GESSO IN POSIZIONE FERMA.

GALILEO: IPOTIZZIAMO DI AVERE IL CORPO SU UNA SUPERFICIE COMPLETAMENTE LEVIGATA. SE DIAMO UNA PICCOLA SPINTA AL CORPO, PERCORRE UNA CERTA DISTANZA CHE È MAGGIORE RISPETTO ALLA SITUAZIONE ANALOGA IN CUI LA SUPERFICIE È PIÙ RUGOSA. POSSIAMO AFFERMARE CHE L'ATTRITO RENDE IL CORPO MENO LIBERO.
ADOPERANDO UN ESPERIMENTO "AL LIMITE", RIDUCENDO SEMPRE PIÙ LA RUGOSITÀ DEL TAVOLO, CONCLUDIAMO CHE IL CORPO SI MUOVE A VELOCITÀ COSTANTE.

PRIMO PRINCIPIO DELLA DINAMICA (PRINCIPIO DI INERZIA): UN CORPO LIBERO SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME.
- PER AVVIARE IL MOTO DI UN CORPO OCCORRE UNA FORZA
- PER MANTENERE IL MOTO COSTANTE NON OCCORRE NESSUNA FORZA.

QUESTO IMPLICA CHE QUANDO C'È UNA FORZA SU UN OGGETTO, C'È ANCHE UN'ACCELERAZIONE. LA FORZA È QUINDI LA CAUSA DEL MOTO ED HA UNA RELAZIONE CON L'ACCELERAZIONE. COSÌ COME L'ACCELERAZIONE, ANCHE LA FORZA HA MODULO, DIREZIONE E VERSO, PER CUI SI TRATTA DI UNA GRANDEZZA VETTORIALE.
STUDIAMO LA RELAZIONE CHE INTERCORRE TRA FORZA E ACCELERAZIONE.

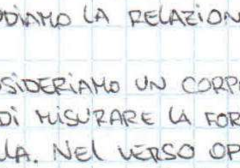
CONSIDERIAMO UN CORPO (=PUNTO MATERIALE) CON UN DINAMOMETRO (SOSTANZIALMENTE, È UNA MOLLA CHE PERMETTE DI MISURARE LA FORZA). APPLICHIAMO UNA FORZA SUL CORPO DETERMINANDO UN ALLUNGAMENTO Δl DELLA MOLLA. NEL VERSO OPPOSTO ALLA FORZA DA NOI APPLICATA C'È UNA FORZA CHE CERCA DI FAR TORNARE LA MOLLA NELLA POSIZIONE INIZIALE, LA QUALE È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALL'ALLUNGAMENTO.
LA MOLLA, IN UN DETERMINATO ISTANTE DI TEMPO, STA APPLICANDO UNA FORZA COSTANTE ED IL CORPO SI MUOVE CON ACCELERAZIONE COSTANTE NELLA STESSA DIREZIONE E NELLO STESSO VERSO DELLA FORZA APPLICATA DALLA MOLLA:

$\bar{F} = k \cdot \bar{a}$ DOVE k È UNA GRANDEZZA SCALARE.

SE RIPROVIAMO L'ESPERIMENTO CON UN CORPO DI MASSA MAGGIORE, ACCELERAZIONE E FORZA SARANNO MAGGIORI. POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CON IL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA (EQUAZIONE DI NEWTON):

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

DOVE m È LA MASSA INERZIALE, UN CONCETTO DIVERSO DALLA MASSA GRAVITAZIONALE. TECNICAMENTE, NON C'È UNA RELAZIONE TRA MASSA INERZIALE E MASSA GRAVITAZIONALE, MA SONO SEMPRE UGUALI. DA QUESTA UGUAGLIANZA NASCE LA TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE DI EINSTEIN.



L'ACCELERAZIONE HA DIREZIONE E VERSO UGUALE A $\bar{F}_R$ (FORZA RISULTANTE).
DUNQUE, DATO UN CORPO CON MASSA m, LA SUA ACCELERAZIONE È OTTENUTA SEMPRE COME:

$\dfrac{\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n}{m} = \bar{a}$ DOVE $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ SONO TUTTE LE FORZE CHE AGISCONO SUL CORPO DI MASSA m.

CONOSCENDO TUTTE LE FORZE CHE AGISCONO SU UN PUNTO MATERIALE DI MASSA m, POSSO PREVEDERNE IL MOTO:

$\bar{F} = \dfrac{d\bar{P}}{dt}$ DOVE $\bar{P}$ È LA QUANTITÀ DI MOTO: $\bar{P} = m \cdot \bar{v} \Rightarrow \dfrac{d\bar{P}}{dt} = \dfrac{d\, m \cdot \bar{v}}{dt} = m \cdot \bar{a}$ LA MASSA È COSTANTE.

NEL CASO DI UN CORPO IN CADUTA LIBERA (TRASCURANDO L'ARIA), L'ACCELERAZIONE È QUELLA GRAVITAZIONALE:
$\bar{P} = m \cdot \bar{g}$ DOVE $\bar{P}$ È UNA FORZA ED È DETTA FORZA-PESO (O ANCHE FORZA DI GRAVITÀ).

L'UNITÀ DI MISURA DELLA FORZA È IL NEWTON NEL SISTEMA MKS ED È DEFINITO COME LA FORZA APPLICATA AD UN CORPO (PUNTO MATERIALE) DI UN CHILOGRAMMO (MASSA) PER GENERARE UN'ACCELERAZIONE DI UN METRO AL SECONDO QUADRATO:

$$1\,N = 1\,kg \cdot 1\,\frac{m}{s^2}$$

NEL SISTEMA CGS L'UNITÀ DI MISURA DELLA FORZA È LA DINA:

$1\,dy = 1\,g \cdot 1\,cm/s^2$ $\qquad$ $1\,N = 10^5\,dy$

ESISTONO DIVERSI TIPI DI FORZE:

- FORZA NORMALE VINCOLARE
  - NON PROVOCA MOTO
  - SI OPPONE ALLA FORZA-PESO
  - HA UN LIMITE MASSIMO OLTRE IL QUALE NON PUÒ ANDARE
  - È NORMALE, OVVERO PERPENDICOLARE AL PIANO
- FORZA ELASTICA
  - PROPORZIONALE ALL'ALLUNGAMENTO DELLA MOLLA RISPETTO ALLA POSIZIONE INIZIALE

    $\overline{F}_{EL} = -k \cdot \overline{\Delta l}$

    Δl → ALLUNGAMENTO

    k → COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA

    $-$ → LA FORZA ELASTICA HA VERSO OPPOSTO ALL'ALLUNGAMENTO
- TENSIONE
  - È AD ESEMPIO LA FORZA IMPRESSA DA UNA CORDA LEGATA AD UN CORPO IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME
  - SE QUESTA FORZA VIENE VINTA, LA CORDA SI ROMPE ED IL CORPO PROSEGUE PER LA TANGENTE
- FORZE DI ATTRITO.
  - ATTRITO STATICO

    ESEMPIO: HO UN ARMADIO DA SPOSTARE. IMPRIMENDO UNA FORZA SU DI ESSO IN SENSO ORIZZONTALE, L'ARMADIO NON SI SPOSTA SE LA FORZA NON È SUFFICIENTE: C'È UNA FORZA UGUALE ED OPPOSTA CHE È DETTA ATTRITO STATICO. COSÌ COME LA REAZIONE NORMALE VINCOLARE, ANCHE L'ATTRITO STATICO È SUPERIORMENTE LIMITATO. SPINGENDO PIÙ FORTE L'ARMADIO SI SPOSTA PERCHÉ STIAMO VINCENDO LA FORZA DI ATTRITO STATICO. LA FORZA DI ATTRITO STATICO (O MEGLIO, IL SUO LIMITE MASSIMO) DIPENDE DALLA RUGOSITÀ DELLE SUPERFICI DI CONTATTO.

    LE SUPERFICI DELL'ARMADIO E DEL PAVIMENTO NON SARANNO MAI TOTALMENTE LEVIGATE.

    LE DUE SUPERFICI SI TOCCANO SOLO IN ALCUNI PUNTI, GENERANDO ATTRITO STATICO.

    GLI ELETTRONI DEI PUNTI DI CONTATTO DELLE DUE SUPERFICI CREANO TRA DI ESSI UN LEGAME. È PROPRIO QUESTO LEGAME CHE SI OPPONE ALLA NOSTRA SPINTA, COSTITUENDO L'ATTRITO STATICO.

    N.B. L'ATTRITO STATICO NON DIPENDE DAL PESO DEL CORPO, BENSÌ DALLA REAZIONE NORMALE VINCOLARE DEL PIANO DI APPOGGIO:

    $F_S \leq \mu_S \cdot N$ ⇒ È SCRITTA NON IN FORMA VETTORIALE POICHÈ DIPENDE DAI MODULI

    N → REAZIONE NORMALE VINCOLARE

    μ_S → COSTANTE DIPESA DALLA RUGOSITÀ DELLE SUPERFICI

    F_S → FORZA DI ATTRITO STATICO
  - ATTRITO DINAMICO

    CONSIDERIAMO LO STESSO ESEMPIO PRECEDENTE. UNA VOLTA VINTA LA FORZA DI ATTRITO STATICO L'ARMADIO SI MUOVE. CONTINUANDO AD IMPRIMERE LA MEDESIMA FORZA IN MODO COSTANTE, L'ARMADIO SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME (E NON UNIFORMEMENTE ACCELERATO). C'È QUINDI UNA FORZA SI OPPONE, OVVERO LA FORZA DI ATTRITO DINAMICO:

    $F_D = \mu_D \cdot N$
  - ATTRITO VISCOSO

    È UNA FORZA CHE OSTACOLA IL MOVIMENTO DI UN CORPO IN UN FLUIDO (ES. UN AEREO AD ALTA VELOCITÀ OPPURE UN SOTTOMARINO). A SECONDA DELLA DENSITÀ DEL FLUIDO, CAMBIA L'INTENSITÀ DELL'ATTRITO VISCOSO. INOLTRE È PROPORZIONALE ALLA VELOCITÀ: PIÙ VELOCEMENTE SI MUOVE IL CORPO, PIÙ FORTE SARÀ L'ATTRITO.

    $F_V = -b \cdot \overline{v}$

    $\overline{v}$ → VELOCITÀ DEL CORPO

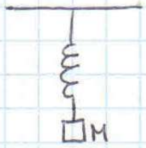
    b → COEFFICIENTE DI ATTRITO VISCOSO (DIPESO DALLA DENSITÀ DEL FLUIDO)

    $-$ → HA VERSO OPPOSTO

L'equazione di Newton è il fulcro grazie al quale possiamo risolvere diversi problemi in cui ci sono delle forze.

$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$ oppure, più genericamente, $\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = m \cdot \bar{a}$

Solo esaminando tutte le forze che hanno una certa influenza possiamo capire cosa succede. Prendiamo in esame il caso di una molla con costante elastica k, fissata al soffitto, a cui viene assicurato un corpo (punto materiale) di massa m. Quest'ultimo provoca un allungamento della molla Δl. Importante in tal senso è la costante elastica k: più è alta, più la molla è rigida.



Per studiare il fenomeno abbiamo prima bisogno di un sistema di riferimento. Per comodità e non avere a che fare con allungamenti negativi, scegliamo il sistema di riferimento con l'asse x (orizzontale) verso destra e l'asse y (verticale) verso il basso.

Le forze in gioco sono due e applicate entrambe sul punto materiale:
- forza-peso (trascuriamo l'attrito con l'aria)
- forza elastica

Sono sulla stessa direzione, ma hanno verso opposto.

$\bar{P} = M \cdot \bar{g}$
$\bar{F}_{el} = -k \, \Delta l$

L'equazione di Newton nel nostro caso è (considerando solo i moduli):

$$Mg - k\Delta l = M \cdot a$$

Se le forze in gioco sommano a 0, il corpo resta fermo (è in equilibrio):

$$Mg - k\Delta l = Ma = 0$$

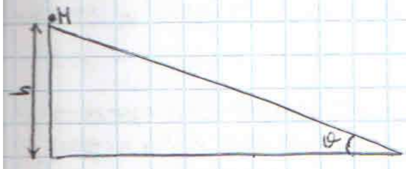
Questo non vuol dire che il corpo di massa M non ha provocato allungamento. Più precisamente, la forza-peso causa l'allungamento ($\Delta l'$) fino ad un certo punto per poi fermarsi rimanendo in equilibrio: in questo momento le forze in gioco sommano a 0. L'allungamento $\Delta l'$ della molla è quindi:

$$\Delta l' = l' - l_0 = \frac{Mg}{k}$$

Con questa formula possiamo calcolare l'allungamento di una molla di costante elastica k applicando ad essa una massa M (trascurando l'attrito con l'aria).

Estrapoliamo da questo esempio la serie di passi da seguire per analizzare un problema sulla base della legge di Newton:
1. Individuare il punto materiale (o i punti materiali)
2. Individuare le forze in gioco sul punto
3. Costruire il diagramma del corpo libero (si mostrano graficamente le varie forze applicate)
4. Scegliere un sistema di riferimento
5. Ricavare l'equazione di Newton
6. Proiettare le forze lungo gli assi

CONSIDERIAMO UN PIANO INCLINATO DI ANGOLAZIONE θ E ALTEZZA h TOTALMENTE LISCIO, IN CUI POSSIAMO TRASCURARE L'ATTRITO. POSIAMO UN CORPO DI MASSA M IN CIMA E LO LASCIAMO CADERE CON VELOCITÀ INIZIALE NULLA.

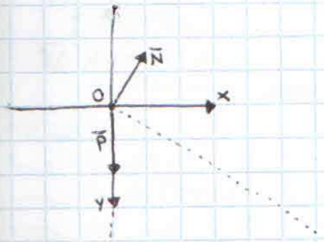


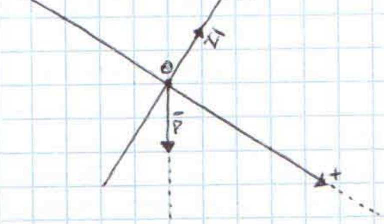
1. IL PUNTO MATERIALE É il CORPO DI MASSA M
2. FORZE IN GIOCO SUL PUNTO MATERIALE:
   - FORZA-PESO DEL PUNTO MATERIALE
   - REAZIONE NORMALE VINCOLARE DEL PIANO INCLINATO

   (ATTRITO NON CONSIDERATO)

3. DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO

4. SISTEMA DI RIFERIMENTO: POSSO SCEGLIERE TRA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO IN CUI UN ASSE COINCIDE CON LA DIREZIONE DI $\bar{P}$ O UN SISTEMA DI RIFERIMENTO IN CUI UN ASSE COINCIDE CON LA DIREZIONE DI $\bar{N}$:

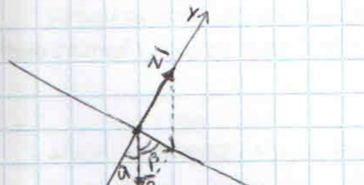




É PIÙ COMODO IL SECONDO SISTEMA DI RIFERIMENTO, IN CUI LA y RIMANE COSTANTE ED É SOLO LA x A CAMBIARE NEL TEMPO.

5. EQUAZIONE DI NEWTON (VETTORIALE): $\bar{P} + \bar{N} = M \cdot \bar{a}$

6. PROIEZIONE LUNGO GLI ASSI
DOBBIAMO PROIETTARE LA RISULTANTE DELLE DUE FORZE $\bar{P}$ ED $\bar{N}$ SUGLI ASSI CARTESIANI.



LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO É 180°:

$\theta + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \beta = 90° - \theta$

L'ANGOLO COMPRESO TRA GLI ASSI CARTESIANI É RETTO, PER CUI:

$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - \beta = 90° - 90° + \theta = \theta \Rightarrow \alpha = \theta$

~~LA COMPONE~~

$\text{SEN}\,\beta = \text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta \qquad \cos\beta = \cos(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$

LE COMPONENTI DELLA FORZA RISULTANTE SARANNO QUINDI:

$y: -Mg\cos\theta + N = M \cdot a_y \Rightarrow (N = Mg\cos\theta) \Rightarrow y: -Mg\cos\theta + Mg\cos\theta = M \cdot a_y \Rightarrow a_y = 0$

$x: Mg \cdot \text{sen}\,\theta = M \cdot a_x \Rightarrow a_x = g \cdot \text{sen}\,\theta$

STUDIAMO QUINDI IL MOTO DEL CORPO:

$$\bar{a} = \begin{cases} a_x = g\,\text{sen}\,\theta \\ a_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = \int g\,\text{sen}\,\theta\,dt + \text{cost}_x = g\,\text{sen}\,\theta \cdot t + \underbrace{\text{cost}_x}_{v_{0x}=0} = g\,\text{sen}\,\theta\, t \\ v_y(t) = \int 0\,dt + \text{cost}_y = \underbrace{\text{cost}_y}_{v_{0y}=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \int g \cdot \text{sen}\,\theta \cdot t\,dt + \text{cost}'_x = g \cdot \text{sen}\,\theta \cdot t^2/2 + \underbrace{\text{cost}'_x}_{x_{0x}=0} = g\,\text{sen}\,\theta\, t^2/2 \\ y(t) = \int 0\,dt + \text{cost}'_y = \underbrace{\text{cost}'_y}_{y_{0y}=0} = 0 \end{cases}$$

LA LUNGHEZZA L DEL PIANO INCLINATO É $h/\text{sen}\,\theta$. QUANTO TEMPO CI VUOLE AFFINCHÉ IL CORPO PERCORRA TUTTO L?

$$\frac{1}{2} g\,\text{sen}\,\theta\, t_F^2 = L \Rightarrow t_F^2 = \frac{2L}{g\,\text{sen}\,\theta} \Rightarrow t_F = \sqrt{\frac{2L}{g\,\text{sen}\,\theta}} = \sqrt{\frac{2h}{g \cdot \text{sen}^2\theta}} = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

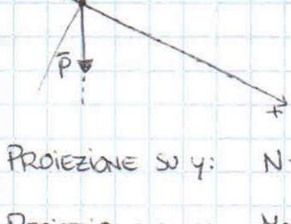
$$v_x(t_F) = g \cdot \text{sen}\,\theta \cdot t_F = \frac{g \cdot \cancel{\text{sen}\,\theta}}{\cancel{\text{sen}\,\theta}}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}$$

OSSERVAZIONI

- IL TEMPO IMPIEGATO A PERCORRERE IL PIANO INCLINATO DIPENDE DA QUANTO È INCLINATO IL PIANO. SE AD ESEMPIO L'ANGOLO θ È PIÙ PICCOLO (IL PIANO È "PIÙ ORIZZONTALE) IL SENO È ANCH'ESSO PIÙ PICCOLO (PARLIAMO DI ANGOLI COMPRESI TRA 0° E 90°) E QUINDI IL CORPO IMPIEGA PIÙ TEMPO.
- MENTRE L'ACCELERAZIONE DIPENDE DALL'ANGOLO θ, LA VELOCITÀ CON CUI IL CORPO TERMINA LA PROPRIA CORSA DIPENDE SOLO DALL'ALTEZZA [redacted] E DALLA FORZA DI GRAVITÀ. SE, AD ESEMPIO, VARIAMO L'ANGOLO θ MANTENENDO COSTANTE L'ALTEZZA h, DETERMINIAMO UN CAMBIAMENTO DI L, MA NON DELLA VELOCITÀ FINALE.

FACCIAMO LO STESSO ESPERIMENTO TENENDO IN CONSIDERAZIONE LA FORZA DI ATTRITO.
QUANDO LASCIAMO IL CORPO IN CIMA AL PIANO INCLINATO, PUÒ SUCCEDERE CHE QUESTO RIMANGA FERMO A CAUSA DELL'ATTRITO STATICO. NEL QUAL CASO L'OGGETTO SI DOVESSE MUOVERE AVREMMO INVECE ATTRITO DINAMICO.
BISOGNA QUINDI ANALIZZARE SEPARATAMENTE I DUE CASI.

1° CASO: ATTRITO STATICO



IL SISTEMA DI RIFERIMENTO È LO STESSO DELL'ESEMPIO SENZA ATTRITO.

$F_S \leq \mu_S \cdot N$ L'ATTRITO STATICO È DOVUTO ALLA REAZIONE VINCOLARE DEL PIANO.

$\overline{N} + \overline{P} + \overline{F_S} = M \cdot \overline{a}$

PROIEZIONE SU y: $N - Mg\cos\theta = Ma_y \Rightarrow (N = Mg\cos\theta) \Rightarrow Ma_y = 0 \Rightarrow a_y = 0$

PROIEZIONE SU x: $Mg\,sen\,\theta - F_S = M \cdot a_x$

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI IL CORPO RESTA FERMO: $Mg \cdot sen\,\theta < F_S$

AUMENTANDO L'ANGOLO θ (0°~90°), AUMENTA $sen\,\theta$ E QUINDI SI ARRIVERÀ A VINCERE LA FORZA DI ATTRITO, CAUSANDO IL MOVIMENTO DEL CORPO: $Mg \cdot sen\,\theta > F_S$

[redacted] L'ATTRITO STATICO HA UN LIMITE F_{MAX} OLTRE CUI BISOGNA ANDARE PER FAR MUOVERE IL CORPO. AD F_{MAX} CORRISPONDE UN ANGOLO θ_{MAX} OLTRE IL QUALE [redacted] IL CORPO SI MUOVE.

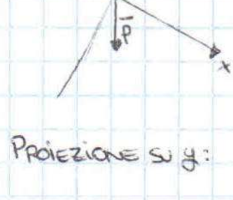
$Mg\,sen\,\theta_{MAX} - \mu_S N = 0$ (EQUILIBRIO) [redacted]

$Mg\,sen\,\theta_{MAX} - \mu_S Mg\cos\theta_{MAX} = 0$

$\mu_S = \dfrac{\cancel{Mg}\,[redacted]\,sen\,\theta_{MAX}}{\cancel{Mg}\cos\theta_{MAX}} = tg\,\theta_{MAX}$ $\Rightarrow$ SE $\theta >$ [redacted] $arctg\,\mu_S$ L'ATTRITO STATICO VIENE VINTO ED IL CORPO SI MUOVE.

2° CASO: ATTRITO DINAMICO.

CONDIZIONE NECESSARIA: L'ATTRITO STATICO È STATO VINTO $\Rightarrow \theta > arctg\,\mu_S$



$F_D = \mu_D \cdot N$

$\overline{N} + \overline{P} + \overline{F_D} = M \cdot \overline{a}$

PROIEZIONE SU y: $N - Mg\cos\theta = Ma_y \Rightarrow (N = Mg\cos\theta) \Rightarrow Ma_y = 0 \Rightarrow a_y = 0$

PROIEZIONE SU x: $Mg\,sen\,\theta - \mu_D N = Ma_x \Rightarrow Mg\,sen\,\theta - \mu_D \cdot Mg\cos\theta = Ma_x \Rightarrow a_x = g(sen\,\theta - \mu_D\cos\theta)$

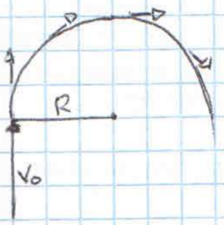
L'ACCELERAZIONE È NATURALMENTE INFERIORE RISPETTO ALLA SITUAZIONE DI PIANO LISCIO. È COMUNQUE UN MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

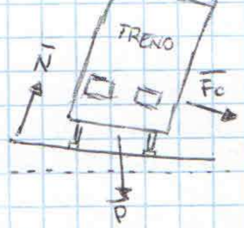
$v_x(t) = \int g(sen\,\theta - \mu_D\cos\theta)\,dt = g(sen\,\theta - \mu_D\cos\theta)\,t$

$x(t) = \int g(sen\,\theta - \mu_D\cos\theta)\,t\,dt = \frac{1}{2} g(sen\,\theta - \mu_D\cos\theta)\,t^2$

IL FENOMENO DEL PIANO INCLINATO È IMPORTANTE PER LA DINAMICA NEL MOTO CURVILINEO DI UN CORPO. IN QUESTO TIPO DI MOTO ABBIAMO UN'ACCELERAZIONE CHE SPINGE VERSO IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA, A CUI CORRISPONDE NATURALMENTE UNA FORZA, DETTA CENTRIPETA. QUESTA FORZA CI CONSENTE DI SEGUIRE LA TRAIETTORIA CURVA SENZA PROSEGUIRE PER LA TANGENTE. LA FORZA CENTRIPETA È GENERATA DALL'ATTRITO TRA I PNEUMATICI ED IL SUOLO: PIÙ È FORTE QUESTO ATTRITO, PIÙ SI RIESCE A FARE LA CURVA A VELOCITÀ SOSTENUTA.

CONSIDERIAMO LE CURVE DELLE LINEE FERROVIARIE O DI ALCUNE PISTE DI CORSE AUTOMOBILISTICHE. IN QUESTI CASI LE CURVE SONO INCLINATE VERSO IL CENTRO. SFRUTTANDO LA FORZA-PESO, ~~CHE SPINGE VERSO IL BASSO~~ IN VIRTÙ DELL'INCLINAZIONE DEL PIANO, L'AUTOMOBILE (O IL TRENO), È GIÀ SPINTO VERSO IL CENTRO GRAZIE ALLA PROIEZIONE DELLA FORZA-PESO SUL PIANO INCLINATO. DUNQUE, LA FORZA DI ATTRITO NECESSARIA A FAR RIMANERE IL CORPO SULLA TRAIETTORIA È MINORE. ECCO PERCHÉ CURVE INCLINATE CONSENTONO DI RAGGIUNGERE VELOCITÀ MAGGIORI.

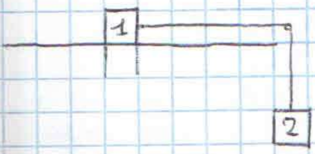




$$\bar{F_c} = M \cdot \frac{V_0^2}{R} \quad \text{(FORZA CENTRIPETA)}$$

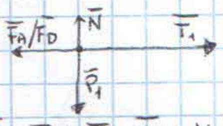
DALLA FORMULA CAPIAMO ANCHE PERCHÉ SE LA CURVA È PIÙ STRETTA SI VA FUORI PISTA PIÙ FACILMENTE.

NON ESISTE NESSUNA FORZA CENTRIFUGA CHE SPINGE VERSO L'ESTERNO: È SOLO UNA FORZA APPARENTE. LA VERA FORZA IN GIOCO È QUELLA CENTRIPETA.



IL PIANO È SCABRO.
IN QUESTO CASO I PUNTI MATERIALI SONO DUE. VANNO QUINDI ANALIZZATE LE FORZE IN GIOCO SU OGNUNO DEI DUE PUNTI.

FORZE IN GIOCO SUL CORPO 1
- FORZA-PESO 1
- REAZIONE NORMALE VINCOLARE DEL PIANO
- ATTRITO STATICO/DINAMICO
- FORZA DI TRASCINAMENTO DOVUTA AL CORPO 2

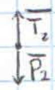


$\bar{P_1} + \bar{N} + \bar{F_A} + \bar{T_1} = M_1 \cdot \bar{a_1}$

$x_1: \quad -F_a + T_1 = M_1 \cdot a_{1x}$

$y_1: \quad -M_1 g + N = M_1 \cdot a_{1y}$

FORZE IN GIOCO SUL CORPO 2
- FORZA-PESO 2
- FORZA DOVUTA AL CORPO 1



$\bar{T_2} + \bar{P_2} = M \cdot \bar{a_2}$

$y_2: -M_2 g + T_2 = M_2 \cdot a_{2y}$

ABBIAMO TRE EQUAZIONI IN SETTE INCOGNITE ($F_a, T_1, a_{1x}, N, a_{1y}, T_2, a_{2y}$). DOBBIAMO CERCARE DI RIDURRE.

- SICCOME IL CORPO 1 NON SI MUOVE LUNGO L'ASSE VERTICALE, $a_{1y} = 0$ $(N = M_1 g)$
- LA FUNE È UNICA PER ENTRAMBI I CORPI: LA TENSIONE APPLICATA È LA STESSA: $T_1 = T_2 = T$
- SE IN UN TEMPO Δt IL CORPO 2 SI SPOSTA DI $y_2' - y_2$, ALLORA IL CORPO 1 SI SPOSTA $x_1' - x_1$. LE VELOCITÀ E LE ACCELERAZIONI CON CUI I DUE CORPI SI MUOVONO SONO UGUALI: $a_{1x} = a_{2y} = a$

$x_1: \quad -F_a + T = -M_1 a$

$y_2: \quad -M_2 g + T = M_2 \cdot a \quad \Rightarrow \quad T = M_2 (a + g)$

CONSIDERIAMO IL CASO DELL'ATTRITO STATICO. $\quad F_S \leq \mu_S \cdot N$

$-F_a + T = -M_1 a$

$-F_a + M_2 (a + g) = -M_1 a$

$(M_1 + M_2) a + M_2 g = F_a$

$(M_1 + M_2)a = F_a - M_2 g$

I CORPI STANNO FERMI QUANDO $F_a \geq M_2 g \Rightarrow \mu_s N \geq M_2 g \Rightarrow \mu_s M_1 g - M_2 g \geq 0 \Rightarrow \mu_s M_1 \geq M_2$

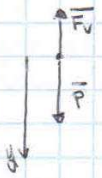
SE AD ESEMPIO $\mu_s = 0.3$ L'OGGETTO RIMANE FERMO ($M_1 = 1\,kg$) FINO A QUANDO M_2 VALE $3.3\,kg$. APPENA M_2 DIVENTA MAGGIORE DI $3.3\,kg$, I CORPI SI SPOSTANO.
CONSIDERANDO CHE L'ATTRITO STATICO VIENE VINTO, CALCOLIAMO L'ACCELERAZIONE CON CUI I DUE CORPI SI MUOVONO:

$$(M_1 + M_2)a = \mu_D M_1 g - M_2 g =$$

$$= g(\mu_D M_1 + M_2)$$

$$a = \frac{g(\mu_D M_1 - M_2)}{M_1 + M_2}$$

CADUTA DI UN GRAVE: CONSIDERIAMO ANCHE L'ATTRITO CON L'ARIA (ATTRITO VISCOSO).
PRENDIAMO IN ESAME IL CASO DI UN PARACADUTISTA CHE SI LANCIA DA UN ELICOTTERO CON VELOCITÀ INIZIALE $v_0 = 0$. INIZIALMENTE, IL PARACADUTE È CHIUSO: LA VELOCITÀ AUMENTA.



LE FORZE IN GIOCO SONO DUE: LA FORZA-PESO E L'ATTRITO VISCOSO.
$\vec{P} = M \cdot \vec{g}$ $\quad \vec{F_v} = -b\,\vec{v}$

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO È UNIDIMENSIONALE DIRETTO VERSO IL BASSO.

$$\vec{P} + \vec{F_v} = M \cdot \vec{a}$$
$$Mg - bv = M \cdot a$$

INIZIALMENTE LA VELOCITÀ È 0. SUBENTRA QUINDI UN'ACCELERAZIONE PARI A g. A CAUSA DELL'ATTRITO VISCOSO (DIPESO NON SOLO DALLA DENSITÀ, MA ANCHE DALLA VELOCITÀ DEL CORPO) L'ACCELERAZIONE DIMINUISCE SEMPRE. SI ARRIVERÀ AD UN PUNTO IN CUI L'ACCELERAZIONE SARÀ NULLA ED IL CORPO SI MUOVERÀ DI MOTO RETTILINEO UNIFORME. DI CONSEGUENZA L'EQUAZIONE DI NEWTON DEVE TENERE IN CONSIDERAZIONE IL TEMPO:

$$Mg - bv(t) = M \cdot a(t)$$

L'ACCELERAZIONE È LA DERIVATA DELLA VELOCITÀ:

$$Mg - bv(t) = M \cdot \frac{dV(t)}{dt}$$ ⇐ EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL TIPO $a\frac{d^2x(t)}{dt} + b\frac{dx(t)}{dt} + c\,x(t) + d = 0$

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{b}{M}v(t)$$

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI $v(t)$ È ESPRESSO NELLA FORMA $A \cdot e^{\lambda t}$. LA SUA DERIVATA HA LA STESSA FORMA.

$$v(t) = A\,e^{\lambda t} + B$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = A\lambda e^{\lambda t}$$
$$g - b/M\,v(t) = A\lambda e^{\lambda t}$$
$$Mg - bv(t) = M \cdot A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}$$
$$Mg - bAe^{\lambda t} - bB = M \cdot A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}$$
$$Ae^{\lambda t}(M\lambda + b) = Mg - bB$$
$$Ae^{\lambda t}(M\lambda + b) - Mg + bB = 0$$

POICHÈ $Ae^{\lambda t}$ È NON NULLO, DEVE VALERE

$$\begin{cases} M\lambda + b = 0 \\ -Mg + bB = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -b/M \\ B = Mg/b \end{cases}$$

ABBIAMO QUINDI $v(t)$:

$$v(t) = Ae^{-\frac{b}{M}t} + \frac{Mg}{b}$$

NON CONOSCIAMO ANCORA A. PER RICAVARLO CONSIDERIAMO $v(0)$, CHE SAPPIAMO ESSERE NULLO:

$$v(0) = Ae^{-\frac{b}{M}0} + \frac{Mg}{b} = 0 = A + \frac{Mg}{b} \Rightarrow A = -\frac{Mg}{b}$$

LA FORMULA DELLA VELOCITÀ DI UN GRAVE IN CADUTA LIBERA CONSIDERANDO L'ATTRITO CON L'ARIA È QUINDI:

$$v(t) = \frac{Mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{M}t}\right)$$

CONSIDERIAMO ORA LA VELOCITÀ PER t CHE TENDE A INFINITO:

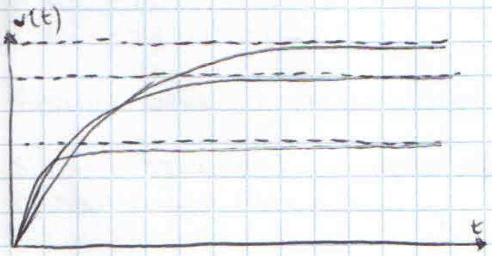
$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{M}t}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{Mg}{b} = \frac{Mg}{b} \quad \leftarrow \text{VELOCITÀ LIMITE}$$

ABBIAMO INDIVIDUATO UNA VELOCITÀ MASSIMA OLTRE CUI IL CORPO IN CADUTA LIBERA NON PUÒ ANDARE. QUESTO VUOL DIRE CHE INIZIALMENTE IL PARACADUTISTA SI MUOVE CON MOTO ACCELERATO. QUEST'ACCELERAZIONE VA PIAN PIANO DIMINUENDO: NEL MOMENTO IN CUI VIENE RAGGIUNTA LA VELOCITÀ LIMITE L'ACCELERAZIONE DIVENTA NULLA ED IL PARACADUTISTA SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME.

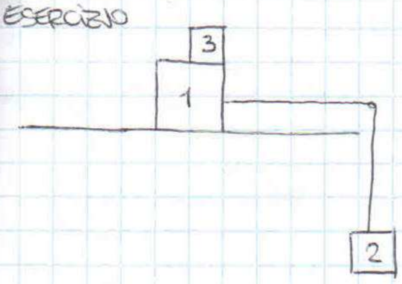
IL COEFFICIENTE DI ATTRITO VISCOSO b DIPENDE DA
- SUPERFICIE DELL'OGGETTO (DIRETTAMENTE PROPORZ.)
- VELOCITÀ DEL CORPO (" ")

INFATTI, QUANDO VIENE APERTO IL PARACADUTE, IL VALORE DI b AUMENTA NOTEVOLMENTE. DI CONSEGUENZA LA VELOCITÀ LIMITE Mg/b SI ABBASSA E SUBENTRA UN'ACCELERAZIONE NEGATIVA.

QUANTO VELOCE IL PARACADUTISTA ARRIVI ALLA NUOVA VELOCITÀ LIMITE DIPENDE DALL'ESPONENZIALE $-e^{-\frac{b}{M}t}$.
SE b È GRANDE $-e^{-\frac{b}{M}t}$ TENDE PIÙ VELOCEMENTE VERSO 0, PER CUI LA VELOCITÀ LIMITE SARÀ RAGGIUNTA PIÙ RAPIDAMENTE. VICEVERSA PER PICCOLI VALORI DI b, SI RAGGIUNGERÀ LA VELOCITÀ LIMITE PIÙ LENTAMENTE.
DATO L'ALTO COEFFICIENTE DI ATTRITO VISCOSO b, IL PARACADUTISTA RAGGIUNGE PRESTO LA VELOCITÀ LIMITE.



ESERCIZIO



$\mu_s = 0{,}2$
$M_1 = 1\,kg$
$M_2 = 40\,kg$

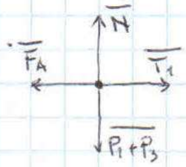
TROVARE LA MASSA DI M_3 MINIMA AFFINCHÉ I CORPI RESTINO FERMI.

I PUNTI MATERIALI SONO DUE IL CORPO COMPOSTO DA 1 E 3, ED IL CORPO 2.

FORZE IN GIOCO SUL PUNTO 1:
- FORZA-PESO
- REAZIONE NORMALE VINCOLARE
- TENSIONE DOVUTA AL CORPO 2
- ATTRITO STATICO

FORZE IN GIOCO SUL PUNTO 2:
- FORZA-PESO
- TENSIONE DOVUTA AL CORPO 1
(ATTRITO CON L'ARIA TRASCURATO)

SISTEMA DI RIFERIMENTO: $\underset{y}{\downarrow}\!\xrightarrow{x}$



$\overline{F_A} + \overline{T_1} + \overline{P_1} + \overline{P_3} + \overline{N} = (M_1+M_3)\overline{a}_1$ $\qquad$ $\overline{T_2} + \overline{P_2} = M_2 \cdot \overline{a_2}$

x_1: $T_1 - \mu_s(M_1+M_3)g = (M_1+M_3)a_{1x}$ $\qquad$ x_2: $0 = M_2 a_{2x} \Rightarrow a_{2x} = 0$

y_1: $(M_1+M_3)g - (M_1+M_3)g = (M_1+M_3)a_{1y} = 0$ $\qquad$ y_2: $M_2 g - T_2 = M_2 a_{2y}$

$\Rightarrow a_{1y} = 0$

LE EQUAZIONI CHE CI INTERESSANO SONO

$$\begin{cases} T_1 - \mu_s(M_1+M_3)g = (M_1+M_3)a_{1x} \\ M_2 g - T_2 = M_2 a_{2y} \end{cases} \qquad T_1 = T_2 = T \qquad a_{1x} = a_{2y} = a$$

$$\begin{cases} T - \mu_s(M_1+M_3)g = (M_1+M_3)a \\ M_2 g - T = M_2 a \end{cases}$$

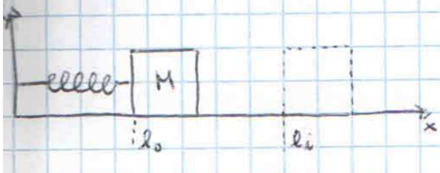
SICCOME CERCHIAMO LA MASSA M_3 AFFINCHÉ I CORPI STIANO FERMI, ABBIAMO $a = 0$:

$$\begin{cases} T - \mu_s(M_1+M_3)g = 0 \\ M_2 g - T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - \mu_s M_1 g + \mu_s M_3 g = 0 \\ T = M_2 g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_2 g - \mu_s M_1 g + \mu_s M_3 g = 0 \\ T = M_2 g \end{cases}$$

$$M_3 = \frac{+M_2 g - \mu_s M_1 g}{\mu_s g} = \frac{+M_2 - \mu_s M_1}{\mu_s} = \frac{+40\,kg - 0{,}2 \cdot 1\,kg}{0{,}2} = \frac{+40\,kg - 0{,}2\,kg}{0{,}2} = 199\,kg$$

V

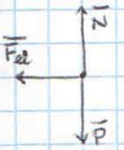
MOTO ARMONICO: AVVIENE SEMPRE TRA DUE PUNTI ESTREMI. È QUINDI UN MOTO PERIODICO. TRASCURANDO LE FORZE DI ATTRITO PARLIAMO DI MOTO ARMONICO IDEALE (OSCILLATORE ARMONICO IDEALE).



QUELLO RAPPRESENTATO È IL CASO PIÙ SEMPLICE DI MOTO ARMONICO IDEALE. INIZIALMENTE, IL CORPO SI TROVA FERMO NEL PUNTO l_0. TIRANDOLO VERSO DESTRA, LO SPOSTO IN POSIZIONE l_i. APPENA LASCIO IL CORPO, LA MOLLA ESERCITA LA FORZA ELASTICA: IL CORPO ARRIVA IN l_0 E CONTINUA A MUOVERSI. LA MOLLA VIENE QUINDI COMPRESSA FINCHÈ IL CORPO SI FERMA E LA MOLLA SI ALLUNGA DI NUOVO, FACENDO TORNARE IL CORPO IN l_0. A QUESTO PUNTO IL CORPO È ANCORA IN MOTO E CONTINUA VERSO DESTRA FINO A RAGGIUNGERE DI NUOVO l_i. IL CORPO QUINDI OSCILLA VERSO SINISTRA E DESTRA IN CONTINUAZIONE.

TRASCURIAMO L'ATTRITO CON L'ARIA E ABBIAMO UN PIANO LISCIO.

PER STUDIARE IL MOTO ABBIAMO BISOGNO DI CONOSCERE LA POSIZIONE DEL CORPO ALL'ISTANTE t.
IL PUNTO MATERIALE È LA MASSA M.
FORZE IN GIOCO: FORZA-PESO, REAZIONE NORMALE VINCOLARE, FORZA ELASTICA.



NOTIAMO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO È IN CONTINUO CAMBIAMENTO RISPETTO A $\vec{F}_{el}$.
SE LA MOLLA È ALLUNGATA OLTRE l_0, LA FORZA ELASTICA TENDE VERSO SINISTRA.
SE LA MOLLA È COMPRESSA OLTRE l_0, LA FORZA ELASTICA TENDE VERSO DESTRA.
LA DIREZIONE DI $\vec{F}_{el}$ È SEMPRE LA STESSA. CAMBIANO CONTINUAMENTE MODULO E VERSO.

SISTEMA DI RIFERIMENTO: $\overset{y}{\llcorner}_x$ L'ORIGINE SUL MURO (TUTTE LE POSIZIONI SONO POSITIVE).

EQUAZIONE DI NEWTON: $\vec{F}_{el} + \vec{P} + \vec{N} = M \cdot \vec{a}$
$y: N - Mg = M \cdot a_y \qquad N = Mg \Rightarrow M a_y = 0 \Rightarrow a_y = 0$
$x: F_{el} = M \cdot a_x$

LA FORMULA CHE ESPRIME LA FORZA ELASTICA È: $\vec{F}_{el} = -k\overline{\Delta l} = -k(\bar{l} - \bar{l}_0)$
- SE $\Delta l > 0$ LA FORZA ELASTICA È NEGATIVA (TIRA VERSO SINISTRA)
- SE $\Delta l = 0$ LA FORZA ELASTICA È NULLA
- SE $\Delta l < 0$ LA FORZA ELASTICA È POSITIVA (SPINGE VERSO DESTRA)

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE LA PROIEZIONE DELLE FORZE SU x COME:

$-k(x(t) - l_0) = M \cdot a_x$ L'ACCELERAZIONE È LA DERIVATA SECONDA DELLA POSIZIONE

$$-k(x(t) - l_0) = M \frac{d^2(x(t))}{dt^2}$$

$$M \frac{d^2(x(t))}{dt^2} + kx(t) - kl_0 = 0$$ ⇐ EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI 2° GRADO

ATTENZIONE: SI TRATTA DI UN MOTO VARIO. LA FORZA ELASTICA, COSÌ COME L'ACCELERAZIONE CON CUI IL CORPO SI MUOVE NON SONO COSTANTI, MA CAMBIANO CONTINUAMENTE.

PER RISOLVERE L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE TRASCURIAMO IL TERMINE NOTO $-kl_0$: QUANDO INTEGREREMO COMPARIRÀ UNA COSTANTE: SI TRATTA PROPRIO DI $-kl_0$ CHE VIENE COSÌ RECUPERATO.

$$\frac{d^2x(t)}{dt} = -\frac{k}{M} x(t)$$

CONSIDERIAMO $-k/M = 1$. STIAMO CERCANDO UNA FUNZIONE CHE DERIVATA DUE VOLTE DÀ LA FUNZIONE STESSA CAMBIATA DI SEGNO. LE UNICHE FUNZIONI CHE SI COMPORTANO COSÌ SONO SENO E COSENO:

$$\frac{d^2\cos(x)}{dx^2} = -\cos x \qquad \frac{d^2 \operatorname{sen}(x)}{dx^2} = -\operatorname{sen} x$$

PIÙ GENERALMENTE, POSSIAMO PORRE:

$$x(t) = A \operatorname{sen} \lambda t + B \cos \lambda t + C$$

ESSENDO UNA NOSTRA FUNZIONE DI PROVA, DOBBIAMO VERIFICARE CHE SIA SOLUZIONE.

DUE TIPI DI GRANDEZZE: SCALARE E VETTORIALE.

GRANDEZZE VETTORIALI SONO CARATTERIZZATE DA MODULO, DIREZIONE E VERSO. $\bar{a}$ $a = |a|$ α

- SOMMA E DIFFERENZA DANNO COME RISULTATO UN VETTORE (REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA)

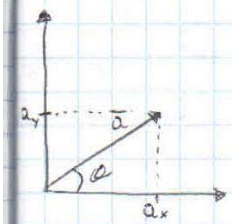
  $\bar{a} = (a_x, a_y)$ $\bar{b} = (b_x, b_y)$ $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$

- PRODOTTO SCALARE PER VETTORE

  $\bar{a} = (a_x, a_y)$ C SCALARE $c \cdot \bar{a} = (c \cdot a_x, c \cdot a_y)$

- PRODOTTO TRA VETTORI:
  - PRODOTTO VETTORIALE: IL RISULTATO È UN VETTORE: $\bar{a} \wedge \bar{b} = \bar{c}$
  - PRODOTTO SCALARE: IL RISULTATO È UNO SCALARE: $\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos\theta$

VERSORE: VETTORE DI MODULO 1 (DI QUALUNQUE DIREZIONE ESSO SIA): $\hat{i}$ VERSORE ASCISSE $\hat{j}$ VERSORE ORDINATE



- $\bar{a}$ VETTORE
- $a = |a|$ MODULO $= \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ (PITAGORA)
- DIREZIONE (ANGOLO θ): DAL TEOR. DEI TR. RETT.: $a_x = a \cdot \cos\theta$ $a_y = a \cdot \operatorname{sen}\theta$

  $\frac{a_y}{a_x} = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\frac{a_y}{a_x}$

- VERSO: SEGNO DI a_x E a_y

PARTENDO SOLO DA a_x E a_y, POSSO CONOSCERE MODULO, DIREZIONE E VERSO.

ES. PRODOTTO ~~VETTORIALE~~ SCALARE

$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) =$

$= a_xb_x\hat{i}\hat{i} + a_xb_y\hat{i}\hat{j} + a_xb_z\hat{i}\hat{k} +$

$+ a_yb_x\hat{i}\hat{j} + a_yb_y\hat{j}\hat{j} + a_yb_z\hat{j}\hat{k} +$

$+ a_zb_x\hat{k}\hat{k} + a_zb_y\hat{k}\hat{j} + a_zb_z\hat{k}\hat{k} =$

$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

PERPENDICOLARI

$\hat{i}\hat{i} = 1$ $\hat{i}\hat{j} = 0$ $\hat{i}\hat{k} = 0$

$\hat{i}\hat{j} = 0$ $\hat{j}\hat{j} = 1$ $\hat{j}\hat{k} = 0$

$\hat{i}\hat{k} = 0$ $\hat{k}\hat{j} = 0$ $\hat{k}\hat{k} = 1$

ESERCIZIO 1

$\bar{a} = (3, 7)$ $\bar{b} = (1, 0)$ TROVARE L'ANGOLO TRA ESSI COMPRESI

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{7}{3} = 67°$ $\beta = \operatorname{arctg}\frac{0}{1} = \operatorname{arctg} 0 = 0$ (TRA L'ALTRO $\bar{b} = \hat{j}$)

L'ANGOLO TRA ESSI COMPRESO È 67°.

Esercizio 2

$\bar{a} = (1+x, 2)$ $\bar{b} = (1, x)$ TROVARE I VALORI DI X PER CUI $\bar{a}$ E $\bar{b}$ SONO PERPENDICOLARI.

DUE VETTORI SONO PERPENDICOLARI SE IL LORO PRODOTTO SCALARE È NULLO.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 = (1+x, 2) \cdot (1, x) =$

$= (1+x)(1) + (2)(x) = 1 + x + 2x = 3x + 1$

$3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -1/3$

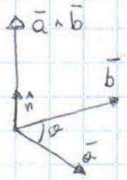
VERIFICA

$\bar{a} = (2/3, 2)$ $\bar{b} = (1, -1/3)$

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{6}{2} = 71{,}57°$ $\beta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = -18{,}43°$ $\alpha + \beta = 71{,}57° + 18{,}43° = \underline{90°}$

I

PRODOTTO VETTORIALE $\bar{a} \wedge \bar{b}$



$a \wedge b = \hat{n} \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \operatorname{sen}\theta$

$\hat{n}$ = VERSORE NORMALE AD ENTRAMBI I VETTORI $\bar{a}$ E $\bar{b}$. DEFINISCE LA DIREZIONE DEL VETTORE RISULTANTE

$x(t) = A \operatorname{sen} \lambda t + B \cos \lambda t + C$

$\frac{dx(t)}{dt} = A\lambda \cos \lambda t - B\lambda \operatorname{sen} \lambda t$

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\lambda^2 \operatorname{sen} \lambda t - B\lambda^2 \cos \lambda t$

SOSTITUENDO QUESTI VALORI NELL'EQUAZIONE INIZIALE:

$M(-A\lambda^2 \operatorname{sen} \lambda t - B\lambda^2 \cos \lambda t) + k(A \operatorname{sen} \lambda t + B\cos \lambda t + C) - k l_0 = 0$

$A \operatorname{sen} \lambda t(-M\lambda^2 + k) + B\cos \lambda t(-M\lambda^2 + k) + (kC - kl_0) = 0$

DA CUI:

$\begin{cases} -M\lambda^2 + k = 0 \\ kC - kl_0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda = \pm \sqrt{k/M} \\ C = l_0 \end{cases}$ ⇐ PRENDO IL VALORE POSITIVO POICHÉ SI TRATTA DI UNA FREQUENZA

L'EQUAZIONE QUINDI DIVENTA:

$x(t) = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{M}}\, t + B \cos \sqrt{\frac{k}{M}}\, t + l_0$ A e B SONO COSTANTI CHE VENGONO FUORI AL MOMENTO DELL'INTEGRAZIONE (DOPPIA). DIPENDONO DAL CASO SPECIFICO.

INIZIALMENTE LA MASSA M SI TROVA IN $l_i \Rightarrow x(0) = l_i$. SOSTITUENDO $t=0$ IN $x(t)$ E $x'(t)$:

$x(0) = A \operatorname{sen} 0 + B\cos 0 + l_0 = B + l_0 = l_i \Rightarrow B = l_i - l_0$

$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 = A\sqrt{\frac{k}{M}} \cos \sqrt{\frac{k}{M}}\, 0 - B\sqrt{\frac{k}{M}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{M}}\, 0 = A\sqrt{\frac{k}{M}} = A\lambda \Rightarrow A = 0$

↳ È LA VELOCITÀ ALL'ISTANTE 0

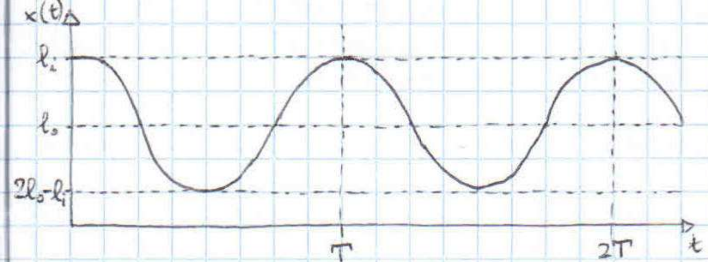
POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE:

$x(t) = (l_i - l_0) \cos \sqrt{\frac{k}{M}}\, t + l_0$ ORA POSSO SAPERE ISTANTE DOPO ISTANTE DOVE SI TROVA LA MASSA. POSSIAMO RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE: SI TRATTA DI UNA COSINUSOIDE.

È UNA FUNZIONE PERIODICA: OGNI VOLTA CHE $(\sqrt{k/M}\, t) = 2\pi$ IL COSENO È $1 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

IL COSENO HA VALORE MAX QUANDO $(\sqrt{k/M}\, t) = 0 \Rightarrow x(t) = l_i - l_0 + l_0 = l_i = x_{MAX}$

IL COSENO HA VALORE MIN QUANDO $(\sqrt{k/M}\, t) = \pi \Rightarrow x(t) = -(l_i - l_0) + l_0 = 2l_0 - l_i = x_{MIN}$



IL GRAFICO EVIDENZIA IL FATTO CHE IL MOTO È VARIO. LA POSIZIONE $x(t)$ DIMINUISCE CON UN'ACCELERAZIONE NON COSTANTE FINO AD ARRIVARE A $2l_0 - l_i$, PUNTO ESTREMO. LA COMPRESSIONE DELLA MOLLA FA SÌ CHE LA FORZA ELASTICA SPINGE IL CORPO NEL VERSO OPPOSTO. QUANDO ARRIVA A l_0, LA MOLLA NON APPLICA FORZA, IL CORPO CONTINUA A SPOSTARSI. SUPERATO l_0 LA MOLLA TIRA CON UNA FORZA SEMPRE MAGGIORE (IN MODULO) FINO A CHE $x(t) = l_i$.

$x(t) = l_0$ È IL VALORE DI RIPOSO DELLA MOLLA (NON APPLICA FORZE).

SE L'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO FOSSE STATA IN l_0, AVREMMO AVUTO UNA COMUNE COSINUSOIDE.

CALCOLIAMO LA VELOCITÀ:

$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -(l_i - l_0)\sqrt{\frac{k}{M}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{M}}\, t$

$v_x(t) = -(l_i - l_0)\sqrt{\frac{K}{M}} \cdot \operatorname{sen}\sqrt{\frac{K}{M}}\,t$

IL SENO É MASSIMO IN CORRISPONDENZA DEL PUNTO $\pi/2$. QUANDO $\sqrt{K/M}\,t = \pi/2$ LA VELOCITÁ É NEGATIVA. (LA MOLLA TIRA VERSO SINISTRA). DA QUI IN POI LA VELOCITÁ CRESCE, CAMBIA SEGNO FINO A RAGGIUNGERE LA VELOCITÁ MASSIMA, QUANDO ($\sqrt{K/M}\,t = \pi$).

- PUNTO $\overleftarrow{l_i}$: POSIZIONE MASSIMA (COSENO MASSIMO) VELOCITÁ NULLA (SENO NULLO) $t=0$
- PUNTO $\overleftarrow{l_0}$: POSIZIONE DI RIPOSO (COSENO 0,5) VELOCITÁ NEGATIVA (MINIMA) $t=\pi/2$
- PUNTO $\overleftrightarrow{2l_0-l_i}$: POSIZIONE MINIMA (COSENO MINIMO) VELOCITÁ NULLA (SENO NULLO) $t=\pi$
- PUNTO $\overrightarrow{l_0}$: POSIZIONE DI RIPOSO (COSENO 0,5) VELOCITÁ POSITIVA (MASSIMA) $t=3\pi/4$
- PUNTO $\overrightarrow{l_i}$: POSIZIONE MASSIMA (COSENO MASSIMO) VELOCITÁ NULLA (SENO NULLO) $t=2\pi$

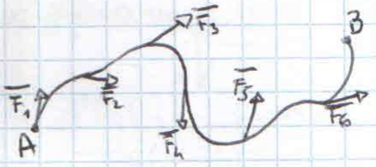
SE CONSIDERIAMO L'ATTRITO CON L'ARIA E CON LA SUPERFICIE, IL MOTO NON SI MANIFESTA ALL'INFINITO.
A CAUSA DI ATTRITO VISCOSO E DINAMICO LA FORMULA $x(t)$ É MOLTIPLICATA ACCANTO AL COSENO PER $e^{-b/M \cdot t}$ IN UNA SITUAZIONE SIMILE A QUELLA DEL PARACADUTISTA.
MAN MANO CHE IL TEMPO PASSA ($t \to \infty$) L'ESPONENZIALE TENDE A 0, OVVERO $x(t) \to l_0$. L'AMPIEZZA DELLA COSINUSOIDE VA VIA VIA DIMINUENDO (OSCILLAZIONE ARMONICA SFORZATA).
NONOSTANTE IL FATTO CHE L'AMPIEZZA VA DIMINUENDO, LA FREQUENZA E IL PERIODO SONO SEMPRE GLI STESSI.
SU QUESTA OSSERVAZIONE É BASATO IL FUNZIONAMENTO DELL'OROLOGIO A PENDOLO. (LEGGE DELL'ISOCRONIA DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI).

CI SONO DIVERSE TIPOLOGIE DI FORZE:
- FORZE DI REAZIONE
- FORZE "DI SPINTA"

LA DIFFERENZA É CHE SOLO LA SECONDA PROVOCA SPOSTAMENTO. CERCO UNA NUOVA GRANDEZZA CHE MI PERMETTA DI DISTINGUERLE: É UN PRODOTTO TRA DUE VETTORI (FORZA × SPOSTAMENTO), INTESO COME PRODOTTO SCALARE.

$\overline{F} \cdot \overline{\Delta r} > 0 \Rightarrow \overline{F}$ = FORZA ATTIVA (SPINGE)
$\overline{F} \cdot \overline{\Delta r} < 0 \Rightarrow \overline{F}$ = FORZA PASSIVA (TRATTIENE)

C'É PERÓ UN PROBLEMA:



SONO APPLICATE UNA SERIE DI FORZE, LE POSIZIONI SUCCESSIVE NON DELINEANO UNO SPOSTAMENTO RETTILINEO. COME POSSO CALCOLARE $\overline{F} \cdot \overline{\Delta r}$?

IL LAVORO È DEFINITO COME IL PRODOTTO FORZA × SPOSTAMENTO.

IL PUNTO MATERIALE SI MUOVE DAL PUNTO A AL PUNTO B SEGUENDO UNA TRAIETTORIA NON RETTILINEA. LA FORZA, QUINDI, NON È SEMPRE UGUALE, MA PUÒ CAMBIARE CONTINUAMENTE IN MODULO, DIREZIONE E VERSO.
IN QUESTO CASO CALCOLARE IL LAVORO $L = \bar{F} \cdot \overline{\Delta S}$ NON È UN'OPERAZIONE IMMEDIATA. POSSIAMO FARE IN MODO CHE LA DIREZIONE DI $\overline{\Delta S}$ SIA COSTANTE CONSIDERANDO LO SPOSTAMENTO COME UNA SUCCESSIONE DI PICCOLISSIMI INTERVALLI (INFINITESIMI):
$\overline{\Delta S} \to d\bar{S}$
AVRÒ UN NUMERO INFINITO DI SEGMENTI INFINITESIMI: PER OGNUNO DI ESSI CALCOLO $\bar{F} \cdot d\bar{S}$:

$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{F_i} \cdot d\bar{S}_i = L_{AB}$ (LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA $\bar{F}$ PER SPOSTARE IL PUNTO DA A A B)

CHE, SCRITTO PIÙ CORRETTAMENTE, EQUIVALE A:

$L_{AB} = \int_a^b \bar{F} \cdot d\bar{S}$ (INTEGRALE DEFINITO)

CASO PARTICOLARE: SE $\bar{F}$ È COSTANTE IN MODULO, DIREZIONE E VERSO, POSSO PORTARLO FUORI DALL'INTEGRALE: $L_{AB} = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{S} = F\cos\theta \int_A^B d\bar{S} = F \cdot \Delta S \cdot \cos\theta$

NELLO SPOSTAMENTO DA A A B ENTRANO IN GIOCO PIÙ FORZE, OGNUNA DELLE QUALI PUÒ PROVOCARE UNO SPOSTAMENTO E QUINDI GENERARE LAVORO. SE ABBIAMO LE FORZE $\bar{F_1}$, $\bar{F_2}$ E F_3, AVREMO TRE LAVORI DIVERSI L_1, L_2, L_3. SE CONSIDERIAMO INVECE LE FORZE TUTTE INSIEME, $\bar{F_T} = \bar{F_1} + \bar{F_2} + \bar{F_3}$, AVREMO UN LAVORO L_T DIFFERENTE.

$\bar{F_T} = \bar{F_1} + \bar{F_2} + \bar{F_3} = m \cdot \bar{a}$ IN BASE ALL'EQUAZIONE DI NEWTON POSSIAMO SCRIVERE UN'IMPORTANTE PROPRIETÀ DEL LAVORO:

$$L_{AB}^T = \int_A^B \bar{F_T}\, d\bar{S} = \int_A^B m \cdot \bar{a} \cdot d\bar{S} = m \cdot \int_A^B \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{S} = m \cdot \int_A^B d\bar{v} \cdot \frac{d\bar{S}}{dt} = m \cdot \int_A^B \bar{v} \cdot d\bar{v}$$

$\bar{v}$ E $d\bar{v}$ POSSONO NON STARE SULLA STESSA DIREZ

ABBIAMO PERÒ CHE:

$v^2 = \bar{v} \cdot \bar{v}$ $\quad \frac{d\bar{v}\cdot\bar{v}}{dv} = 1 \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot 1 = 2\bar{v}$ $\quad \frac{1}{2}\frac{d\bar{v}\cdot\bar{v}}{dv} = \bar{v}$

QUINDI:

$$L_{AB}^T = m\int_A^B \bar{v} \cdot d\bar{v} = \frac{m}{2}\int_A^B \frac{d(\bar{v}\cdot\bar{v})}{dv} \cdot d\bar{v} = \left[\frac{m}{2}(\bar{v}\cdot\bar{v})\right]_A^B = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$$

LA RELAZIONE APPENA TROVATA È DETTA TEOREMA DELLE FORZE VIVE (O TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA):
"IL LAVORO L_{AB} COMPIUTO DA UNA QUALSIASI FORZA RISULTANTE $\bar{F}$ SU UN CORPO DI MASSA m CHE SI SPOSTA DALLA POSIZIONE r_A ALLA POSIZIONE r_B (NEL TEMPO $t_B - t_A$), LUNGO UN QUALSIASI PERCORSO, È DATO DALLA VARIAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA TRA L'ISTANTE t_A E L'ISTANTE t_B."

DUNQUE, SE IL CORPO FA PERCORSI DIVERSI SI HANNO LAVORI DIVERSI ED ENERGIE CINETICHE DIVERSE.

SE IL LAVORO VIENE ESPRESSO COME DIFFERENZA DI ENERGIA CINETICA IN DUE PUNTI DIVERSI, ALLORA LAVORO ED ENERGIA HANNO LA STESSA UNITÀ DI MISURA:
$1\,N \cdot 1\,m = 1\,J$ (JOULE) IN MKS $\quad 1\,dy \cdot 1\,cm = 1\,erg$ IN CMS $\quad 1\,erg = 10^{-7}\,J$
SI DICE QUINDI CHE L'ENERGIA "VIENE TRASFORMATA" IN LAVORO, MA PIÙ TECNICAMENTE PARLANDO SONO DUE ASPETTI DELLA STESSA GRANDEZZA.

È SEMPRE VERO CHE IL LAVORO DIPENDE DALLA TRAIETTORIA? SUPPONIAMO DI AVERE UNA FORZA $\bar{F}$ CHE SPOSTA IL CORPO DA A A B PER CUI IL LAVORO NON DIPENDE DALLA TRAIETTORIA. QUINDI, SE SI SEGUE LA TRAIETTORIA 1 O LA TRAIETTORIA 2 O LA TRAIETTORIA 3, IL LAVORO È SEMPRE UGUALE. UNA FORZA CON QUESTA PROPRIETÀ È DETTA FORZA CONSERVATIVA: IL LAVORO NON DIPENDE DALLA TRAIETTORIA SEGUITA.

SE CONSIDERIAMO UN CAMMINO CHIUSO (LO SPOSTAMENTO PARTE DAL PUNTO A E TERMINA NELLO STESSO PUNTO A), IN CASO DI FORZA CONSERVATIVA ABBIAMO:

$$\int_A^A \overline{F}_c \cdot d\overline{s} = 0$$

N.B. VALE SOLO IN CASO DI FORZA CONSERVATIVA.

ESPRIMIAMO IL LAVORO DA A A B COME:

$$L_{AB} = \int_A^B \overline{F}_c \cdot d\overline{s} = V(B) - V(A)$$

DOVE V(B) E V(A) SONO LE VALUTAZIONI DELLA FUNZIONE INTEGRATA IN AB.

DEFINIAMO $U = -V$ COME $U = -\int_A^B \overline{F}_c \cdot d\overline{s}$

U È UN'ENERGIA, DETTA ENERGIA POTENZIALE, CHE PUÒ ESSERE DEFINITA SOLTANTO SE F È CONSERVATIVA.

CONSIDERIAMO TRE FORZE CONSERVATIVE APPLICATE SU UNA MASSA m:

$\overline{F}_1^c, \overline{F}_2^c, \overline{F}_3^c$ $\qquad \overline{F}_T^c = \overline{F}_1^c + \overline{F}_2^c + \overline{F}_3^c$

$$L_{AB} = \int_A^B \overline{F}_T^c \cdot d\overline{s} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \underbrace{\int_A^B \overline{F}_1^c \cdot d\overline{s}}_{U_1} + \underbrace{\int_A^B \overline{F}_2^c \cdot d\overline{s}}_{U_2} + \underbrace{\int_A^B \overline{F}_3^c \cdot d\overline{s}}_{U_3}$$

$$U_i = -\int_A^B \overline{F}_i^c \cdot d\overline{s} = U_1(A) - U_1(B)$$

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE CHE:

$$U_1 + U_2 + U_3 = U_1(A) - U_1(B) + U_2(A) - U_2(B) + U_3(A) + U_3(B) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v_B^2}_{k(B)} + U_1(B) + U_2(B) + U_3(B) = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v_A^2}_{k(A)} + U_1(A) + U_2(A) + U_3(A)$$

CON k(A) E k(B) INDICHIAMO RISPETTIVAMENTE L'ENERGIA CINETICA NEL PUNTO A E NEL PUNTO B.

$$K(B) + U_T(B) = k(A) + U_T(A)$$

LA SOMMA DI ENERGIA POTENZIALE ED ENERGIA CINETICA È DETTA ENERGIA MECCANICA:

$$E_M(B) = E_M(A)$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA: QUANDO SU UN CORPO (PUNTO MATERIALE) VENGONO APPLICATE SOLO FORZE CONSERVATIVE L'ENERGIA MECCANICA NON CAMBIA. L'ENERGIA MECCANICA È UNA COSTANTE DEL MOTO E RIMANE INVARIATA IN OGNI PUNTO QUANDO IL LAVORO NON DIPENDE DAL PERCORSO.

RESTA DA INDIVIDUARE LE FORZE CONSERVATIVE CHE CI CIRCONDANO, OVVERO PER CUI IL LAVORO NON DIPENDE DAL CAMMINO. CONSIDERIAMO LA FORZA-PESO APPLICATA SU UNA PIUMA DA ALTEZZA h, CHE CADE SEGUENDO UNA TRAIETTORIA NON RETTILINEA. EVIDENTEMENTE, LA FORZA-PESO NON È L'UNICA FORZA IN GIOCO (ALTRIMENTI NON SI SPIEGHEREBBE LA TRAIETTORIA SEGUITA). IL LAVORO RELATIVO ALLA FORZA-PESO È:

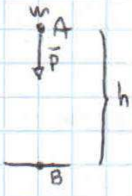
$$L_{AB}^P = \int_A^B \overline{P} \cdot d\overline{s} \qquad \overline{P} = m \cdot g \cdot \hat{j} \qquad d\overline{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} \qquad \overline{P} \cdot d\overline{s} = (0\hat{i} + mg\hat{j})(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}) = mg\,dy$$

ESSENDO $\overline{P} \cdot d\overline{s} = mg\,dy$, IL LAVORO NON DIPENDE DALLA TRAIETTORIA, MA SOLO DALLO SPOSTAMENTO IN VERTICALE. LA FORZA-PESO È CONSERVATIVA. L'ENERGIA POTENZIALE ANNESSA È:

$$U_P = -\int_A^B \overline{P} \cdot d\overline{s} = mg(y(A) - y(B)) = mgh$$

L'ENERGIA POTENZIALE RELATIVA ALLA FORZA-PESO DIPENDE DALL'ALTEZZA DA CUI CADE IL CORPO, CIOÈ DALLA DISTANZA h TRA IL PIANO DA CUI INIZIA LA CADUTA AL PIANO DI APPOGGIO FINALE. QUESTA SECONDA COMPONENTE È FONDAMENTALE PER INDIVIDUARE LO ZERO DELL'ENERGIA POTENZIALE. IMPOSTANDO LO ZERO DELL'ENERGIA POTENZIALE IN CORRISPONDENZA DEL PUNTO PIÙ BASSO CHE È POSSIBILE RAGGIUNGERE SI POSSONO AVERE VALORI SEMPRE POSITIVI DELL'ENERGIA POTENZIALE (IL CHE CONSENTE CALCOLI PIÙ SEMPLICI).

GRAZIE AL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA POSSIAMO RISOLVERE PIÙ SEMPLICEMENTE ALCUNI PROBLEMI DI CINEMATICA.
ESEMPIO: A CHE VELOCITÀ ARRIVA SUL PAVIMENTO UN OGGETTO CHE CADE DA UN'ALTEZZA h? (TRASCURANDO LA PRESENZA DELL'ARIA).



$$E_M(A) = E_M(B)$$

$$k(A) + U(A) = k(B) + U(B)$$

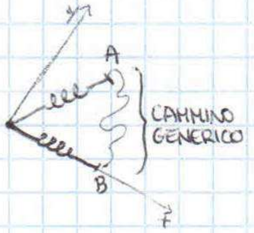
$$0 + mgh = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 + 0$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

DA QUESTO ESEMPIO SI TROVA MOTIVAZIONE ANCHE AL FATTO CHE LA VELOCITÀ CON CUI UN CORPO RAGGIUNGE IL SUOLO [redacted] PARTENDO DALLA CIMA DI UN PIANO INCLINATO CON ANGOLO 20° È UGUALE ALLA VELOCITÀ FINALE SE L'ANGOLO È 60° (A PARITÀ DI ALTEZZA).

OSSERVAZIONE: QUALUNQUE FORZA COSTANTE IN MODULO, DIREZIONE E VERSO È CONSERVATIVA. PIÙ PRECISAMENTE, TUTTE LE FORZE CHE HANNO DIREZIONE COSTANTE SONO CONSERVATIVE.
MA LA FORZA DI GRAVITÀ È CONSERVATIVA, EPPURE HA UN ANGOLO CHE VARIA IN FUNZIONE DEL TEMPO. SE CONSIDERO LA FORZA GRAVITAZIONALE IN UN SISTEMA DI COORDINATE POLARI, AVREMO UNA FORZA UNIDIREZIONALE.

CONSIDERIAMO ORA LA FORZA ELASTICA: ANCH'ESSA RISULTERÀ CONSERVATIVA (RIVOLTA SEMPRE VERSO IL POLO):



$$F_{el} = -k\overline{\Delta l}$$

$$L_{AB}^{el} = \int_A^B \overline{F_{el}} \cdot d\bar{s} = \int_A^B -k\overline{\Delta l} \cdot d\bar{s} \qquad \overline{\Delta l} = \bar{l} - \bar{l_0} = (l_x - l_{0x})\hat{\imath} + (l_y - l_{0y})\hat{\jmath}$$

$$L_{AB}^{el} = \int_A^B -k\left[(l_x - l_{0x})\hat{\imath} + (l_y - l_{0y})\hat{\jmath}\right]\left[dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}\right] =$$

$$= \int_A^B -k\left[(x-x_0)\,dx + (y-y_0)\,dy\right] =$$

$$= \int_A^B -k(x-x_0)\,dx + \int_A^B -k(y-y_0)\,dy$$

NOTIAMO CHE I DUE INTEGRALI SONO DELLO STESSO TIPO. RISOLVIAMONE UNO APPLICANDO POI QUANTO EMERSO ANCHE ALL'ALTRO.

$$\int_A^B -k(x-x_0)\,dx = -k\int_A^B x\,dx + kx_0\int_A^B dx = -\frac{1}{2}k\left[x^2\right]_A^B + kx_0\left[x\right]_A^B = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 + kx_0x_B - kx_0x_A$$

ANALIZZANDO IL RISULTATO, NOTIAMO CHE $\frac{1}{2}kx_A^2 - kx_0x_A$ RAPPRESENTA QUASI IL QUADRATO DI UN BINOMIO:

$$(x_A - x_0)^2 = x_A^2 - 2x_Ax_0 + x_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{2}(x_A - x_0)^2 = \frac{1}{2}kx_A^2 - kx_Ax_0 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$\frac{k}{2}(x_A - x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx_A^2 - kx_Ax_0 \quad \text{[redacted]}$$
$$-\frac{k}{2}(x_B - x_0)^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = -\frac{1}{2}kx_B^2 + kx_Bx_0$$

HO SCRITTO IN FORMA DIVERSA IL RISULTATO PRECEDENTE

SOMMANDO LE DUE EQUAZIONI SI OTTIENE AL SECONDO MEMBRO IL RISULTATO PRECEDENTE. AL PRIMO MEMBRO:

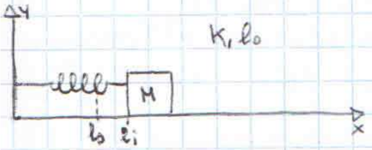
$$\frac{1}{2}k(x_A - x_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_B - x_0)^2 \cancel{- \frac{1}{2}kx_0^2} \cancel{+ \frac{1}{2}kx_0^2} = -\frac{1}{2}k\left[(x-x_0)^2\right]_A^B \quad \left(= \int_A^B -k(x-x_0)\,dx\right)$$

RITORNANDO AL CALCOLO DEL LAVORO:

$$L_{AB}^{el} = \int_A^B -k(x-x_0)\,dx + \int_A^B -k(y-y_0)\,dy = -\frac{1}{2}k\left[(x-x_0)^2\right]_A^B - \frac{1}{2}k\left[(y-y_0)^2\right]_A^B = -\frac{1}{2}k\left[\Delta l^2\right]_A^B$$

IL LAVORO DIPENDE DALL'ALLUNGAMENTO, NON DALLO SPOSTAMENTO. QUINDI LA FORZA ELASTICA È CONSERVATIVA.
$U_{el} = \frac{1}{2}k\Delta l^2$

RIPRENDIAMO IL CASO DELL'OSCILLATORE ARMONICO IDEALE:



LA REAZIONE NORMALE VINCOLARE È SEMPRE PERPENDICOLARE ALLA FORZA ELASTICA: NON GENERANDO SPOSTAMENTO NON CI INTERESSA SAPERE SE È CONSERVATIVA O MENO.

QUANDO LA MOLLA È ALLUNGATA DI $\Delta l = x_i - x_0$:

$$K_i + U_i = 0 + \frac{1}{2}k(l_i - l_0)^2 + 0$$

NEL PUNTO 1:

$$K_1 + U_1 = K_1 + \frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2 + 0$$

È DIMINUITO L'ALLUNGAMENTO ⇒ È DIMINUITA L'ENERGIA POTENZIALE

QUANDO L'ENERGIA POTENZIALE SARÀ MINIMA, L'ENERGIA CINEMATICA SARÀ MASSIMA. QUESTO AVVIENE QUANDO LA MOLLA SI TROVA AL PUNTO DI RIPOSO ED IL CORPO CONTINUA IL PROPRIO MOVIMENTO PER POI COMPRIMERE LA MOLLA. LA NATURA COSINUSOIDALE DELLA POSIZIONE DEL CORPO È UNA DIRETTA CONSEGUENZA DEL FATTO CHE L'ENERGIA MECCANICA È SEMPRE UGUALE: ENERGIA POTENZIALE E CINETICA AUMENTANO E DIMINUISCONO VICENDEVOLMENTE.

ESEMPIO

ABBIAMO UNA MOLLA A CUI È ATTACCATA UNA MASSA M. INIZIALMENTE SORREGGIAMO LA MASSA M CON LA MANO (APPLICANDO UNA FORZA DI REAZIONE CHE IMPEDISCE ALLA MOLLA DI ALLUNGARSI). IMPROVVISAMENTE, TOLGO LA MANO, LA MOLLA SI ALLUNGA. QUAL È IL PUNTO PIÙ BASSO RAGGIUNTO DALLA MOLLA?

PER APPLICARE IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA BISOGNA VERIFICARE CHE TUTTE LE FORZE IN GIOCO SIANO CONSERVATIVE. ABBIAMO FORZA-PESO DELLA MASSA M E FORZA ELASTICA APPLICATA DALLA MOLLA: SONO ENTRAMBE CONSERVATIVE. DUNQUE, L'ENERGIA MECCANICA SARÀ UGUALE IN QUALSIASI PUNTO LA MOLLA SI ALLUNGA.

$E_M(i) = E_M(f)$ $\qquad$ i = PUNTO INIZIALE $\quad$ f = PUNTO PIÙ BASSO

$$E_M(i) = K_i + U_i^p + U_i^{el} = 0 + Mg\Delta l_{max} + \frac{1}{2}k(l_i - l_0)^2$$

$$E_M(f) = K_f + U_f^p + U_f^{el} = 0 + 0 + \frac{1}{2}k(l_f - l_0)^2$$

$$Mg\Delta l_{max} + \frac{1}{2}k(l_i - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(l_f - l_0)^2$$

$$Mg(l_f - l_i) + \frac{1}{2}k(l_i - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(l_f - l_0)^2$$ ⇐ È UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO IN l_f.

PIANO INCLINATO SENZA ATTRITO. LA MASSA M È SOLO POGGIATA SULLA MOLLA. UN FILO ASSICURA LA MASSA AL SOSTEGNO, CAUSANDO UNA COMPRESSIONE DELLA MOLLA. TAGLIO IL FILO, LA MOLLA SI ALLUNGA E "SPARA VIA" LA MASSA M. QUAL È L'ALTEZZA MASSIMA RAGGIUNTA DA M SUL PIANO INCLINATO?

POICHÉ LE FORZE SONO CONSERVATIVE POSSO USARE IL PRINC. DI CONS. DELL'EN. MECCANICA.

$$E_M(i) = E_M(f) \iff E_M(i) = K(i) + U_i^p + U_i^{el} = K(f) + U_f^{(P)} + U_f^{el} = E_M(f)$$

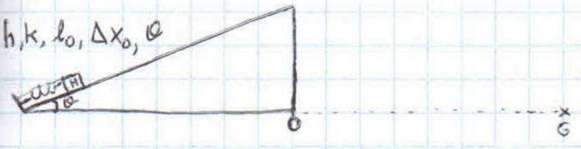
$$E_M(i) = 0 + 0 + \frac{1}{2}k\Delta x_0^2 \qquad E_M(f) = 0 + Mgh + 0 \qquad \Rightarrow \frac{1}{2}k\Delta x_0^2 = Mgh$$

$$h = \frac{k \cdot \Delta x_0^2}{2Mg} \qquad h_0 = (l_0 - \Delta x_0)\operatorname{sen}\theta$$

$$h_{MAX} = h + h_0 = \frac{k \cdot \Delta x_0^2}{2Mg} + (l_0 - \Delta x_0)\operatorname{sen}\theta$$

ESERCIZIO

$h, k, \ell_0, \Delta x_0, \theta$



LA MASSA M È POGGIATA SULLA MOLLA, ASSICURATA AL SOSTEGNO TRAMITE UN FILO CHE TIENE COMPRESSA LA MOLLA. SE TAGLIO IL FILO, LA MASSA VIENE SPINTA SU PER IL PIANO INCLINATO, CADENDO AD UNA DISTANZA OG DALL'ESTREMO DESTRO DEL PIANO INCLINATO. CALCOLARE LA DISTANZA OG.

LE FORZE IN GIOCO SONO FORZA-PESO, REAZIONE NORMALE VINCOLARE, FORZA ELASTICA DELLA MOLLA. CONSIDERIAMO IL FENOMENO IN DUE FASI DIVERSE: LA PRIMA IN CUI IL CORPO SI TROVA SUL PIANO (C'È QUINDI LA REAZIONE NORMALE VINCOLARE) E LA SECONDA IN CUI IL CORPO È IN MOTO PARABOLICO NON ESSENDOCI PIÙ LA REAZIONE NORMALE VINCOLARE.

i: MOMENTO INIZIALE IN CUI IL CORPO VIENE "SPARATO"

f: MOMENTO IN CUI IL CORPO NON È PIÙ SOTTO L'EFFETTO DELLA REAZIONE NORMALE VINCOLARE DEL PIANO

g: MOMENTO IN CUI IL CORPO TOCCA TERRA.

TRASCURANDO L'ATTRITO CON LA SUPERFICIE DEL PIANO INCLINATO E CON L'ARIA, ABBIAMO:

$$E_M(i) = E_M(f) = E_M(g)$$

$$E_M(i) = K(i) + U_i^{p} + U_i^{el} = 0 + (\ell_0 - \Delta x_0)\,\text{sen}\,\theta + \tfrac{1}{2}k\,\Delta x_0^2 = \overbrace{(\ell_0 - \Delta x_0)\,\text{sen}\,\theta}^{h_0} + \tfrac{1}{2}k\Delta x_0^2$$

$$E_M(f) = K(f) + U_f^{p} + U_f^{el} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 + mgh + 0 = m\left(\tfrac{1}{2} v_f^2 + gh\right)$$

$$h_0 + \tfrac{1}{2}k\cdot\Delta x_0^2 = \tfrac{1}{2} m v_f^2 + mgh$$

$$v_f = \sqrt{\frac{(\ell_0 - \Delta x_0)\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}k\Delta x_0^2 - mgh}{\frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{2(\ell_0 - \Delta x_0)\,\text{sen}\,\theta + k\Delta x_0^2 - mgh}{m}}$$

$$v_{fx} = \sqrt{\frac{2(\ell_0 - \Delta x_0)\,\text{sen}\,\theta + k\Delta x_0^2 - mgh}{m}}\,\cos\theta \qquad v_{fy} = \sqrt{\frac{2(\ell_0 - \Delta x_0)\,\text{sen}\,\theta + k\Delta x_0^2 - mgh}{m}}\,\text{sen}\,\theta$$

v_{fy} E v_{fx} SONO LE VELOCITÀ INIZIALE DEL MOTO PARABOLICO. ALL'ISTANTE t AVREMO:

$$v_{fx}(t) = v_f\cos\theta \qquad v_{fy}(t) = v_f\,\text{sen}\,\theta - gt$$

$$x(t) = v_f\cos\theta\cdot t \qquad y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_f\,\text{sen}\,\theta\cdot t + h$$

HO CONSIDERATO O COME ORIGINE DEL MOTO PARABOLICO (FASE 2)

QUANDO $y(t) = 0$ IL CORPO TOCCA IL PUNTO G

$$+\tfrac{1}{2}gt^2 - v_f\,\text{sen}\,\theta\, t + h = 0$$

$$\Delta = v_f^2\,\text{sen}^2\theta - 2gh$$

$$t_G = \frac{v_f\,\text{sen}\,\theta \pm \sqrt{v_f^2\,\text{sen}^2\theta - 2gh}}{g}$$

$$\overline{OG} = x(t_G) = v_f\cdot\cos\theta\cdot t_G = v_f\cdot\cos\theta\cdot\frac{v_f\,\text{sen}\,\theta \pm \sqrt{v_f^2\,\text{sen}^2\theta - 2gh}}{g} =$$

$$= \frac{v_f^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \sqrt{v_f^2\,\text{sen}^2\theta - 2gh}}{g}$$

VII

L'attrito è una forza non conservativa. In effetti, il lavoro fatto dalla forza d'attrito dipende sempre dalla traiettoria, dal tipo di superficie. Inoltre, la forza d'attrito è di tipo passivo (ha associato un lavoro negativo), ed in quanto tale è non conservativa.
Un altro criterio che ci permette di concludere che l'attrito è non conservativo riguarda una traiettoria che parte dal punto A e arriva allo stesso punto A. Se la forza d'attrito fosse conservativa il lavoro sarebbe nullo, cioè la prima parte del percorso avrebbe lavoro positivo, mentre la seconda parte lavoro negativo. Invece l'attrito, agendo sempre nel verso contrario allo spostamento, ha sempre lavoro negativo.

Non essendo una forza conservativa, in presenza d'attrito non vale il principio di conservazione dell'energia meccanica. Consideriamo quindi il caso di forze conservative e non conservative:

$\overline{F_T} = \overline{F_C} + \overline{F_{NC}}$ Ricordiamo che, essendo la seconda non conservativa, non posso definire energia potenziale.

Il teorema dell'energia cinetica vale comunque (è una diretta conseguenza di $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$):

$$L^T_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = K_B - K_A = \int_A^B \overline{F_T} \cdot d\bar{s} = \int_A^B (\overline{F_C} + \overline{F_{NC}}) \cdot d\bar{s} = \int_A^B \overline{F_C} \cdot d\bar{s} + \int_A^B \overline{F_{NC}} \cdot d\bar{s} =$$

$$= U(A) - U(B) + \int_A^B \overline{F_{NC}} \cdot d\bar{s}$$

C'è anche energia potenziale annessa $U_{AB} = -\int_A^B \overline{F_C} \cdot d\bar{s}$

Non c'è energia potenziale annessa

Rapportando quest'ultimo risultato con $K_B - K_A$:

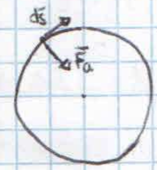
$$K_B - K_A = U(A) - U(B) + \int_A^B \overline{F_{NC}} \cdot d\bar{s}$$

$$K_B + U(B) - (K_A + U(A)) = \int_A^B \overline{F_{NC}} \cdot d\bar{s} = L_{NC}$$

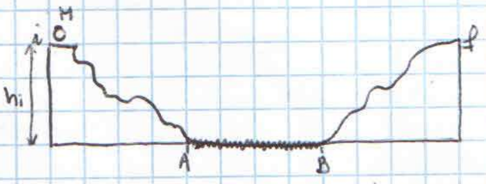
$E_M(B) - E_M(A) = L_{NC}$ ⇐ Poiché non vale il principio di conservazione dell'energia meccanica, questa tende a diminuire.

$\Delta E_M^{AB} = L_{NC}^{AB}$ ⇐ Il lavoro della forza non conservativa è negativo, quindi $\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A)$ è negativo. Ovvero, l'energia meccanica diminuisce.

Tuttavia, c'è un caso in cui l'energia meccanica si conserva nonostante ci sia attrito. Questo si verifica quando la velocità è costante in modulo, anche in presenza di attrito (vedi moto circolare uniforme).



Nel moto circolare uniforme il vettore spostamento segue la traiettoria circolare, mentre la forza di attrito è rivolta verso il centro (sono perpendicolari).
Essendo i vettori forza e spostamento perpendicolari tra loro, il loro prodotto scalare è 0 (= lavoro).



Il piano è liscio (senza attrito) nei tratti a sinistra di A e a destra di B. Tra A e B la superficie è scabra.
Non si tratta di un semplice piano inclinato: l'angolo varia.
Voglio sapere con che velocità la massa m arriva in A.

Se volessi utilizzare solo l'equazione di Newton dovrei conoscere θ in funzione del tempo, il che è troppo complesso.
So che da i ad A il piano non presenta attrito (= ci sono solo forze conservative): vale il principio di conservazione dell'energia meccanica.

$E_M(i) = E_M(A)$

$U(i) = m \cdot g \cdot h_i$ $\quad K_i = 0$ $\qquad K_A = \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$ $\quad U(A) = 0$

$m g h_i = \frac{1}{2} m v_A^2$

$v_A = \sqrt{2 g h_i}$

IL TRATTO COMPRESO TRA A E B È SCABRO: VIENE APPLICATO ATTRITO. QUAL È L'ALTEZZA MASSIMA RAGGIUNTA DALL'ALTRO LATO?
POSSIAMO SFRUTTARE IL FATTO CHE L'ENERGIA MECCANICA DIMINUISCE.

$E_M^i = E_M^A > E_M^f$

$E_M^f - E_M^i = L_{NC}$

PER CALCOLARE L_{NC} DOBBIAMO CONOSCERE LA FORZA DI ATTRITO ED IL LAVORO ANNESSO:

$\vec{F}_D = \mu_D \vec{N} = -\mu_D mg$

$L_{NC} = \int_A^B \vec{F}_D \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_D mg \, dx = -\mu_D mg \int_A^B dx = -\mu_D mg \overline{AB}$

LA DIFFERENZA DI ENERGIA MECCANICA È:

$E_M^f - E_M^i = -\mu_D mg \overline{AB}$

$mg h_{max} - mg h_i = -\mu_D mg \overline{AB}$ ⇒ h_{max} È L'INCOGNITA (ALTEZZA MASSIMA DALL'ALTRO LATO)

QUANTE VOLTE RIESCE A PASSARE IN $\overline{AB}$ PRIMA DI FERMARSI? OGNI VOLTA CHE LA MASSA m PASSA PER $\overline{AB}$ L'ATTRITO DINAMICO CAUSA UNA DIMINUZIONE DELLA VELOCITÀ. PRIMA O POI LA MASSA SI FERMERÀ, ED AVVERRÀ QUANDO L'ENERGIA MECCANICA È NULLA. SICURAMENTE SI FERMERÀ NEL TRATTO $\overline{AB}$, DOVE AGISCE L'ATTRITO.

$\Delta E_M^{AB} = -E_M^i$ ⇐ TUTTA L'ENERGIA MECCANICA INIZIALE VIENE "CONSUMATA"

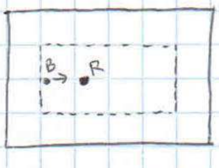
$E_M^f - E_M^i = -E_i = L_{NC}$ (E_M^f = ENERGIA MECCANICA FINALE = 0)

$E_i = x(-\mu_D mg \overline{AB})$ ⇐ PER "CONSUMARE" TUTTA L'ENERGIA MECCANICA E_i INIZIALE BISOGNA "DECURTARNE" x VOLTE IL LAVORO (O ENERGIA) DOVUTO ALL'ATTRITO NEL TRATTO $\overline{AB}$. x È IL NUMERO DI VOLTE CHE LA MASSA m PASSA PER $\overline{AB}$.

$x = \frac{-\mu_D mg \overline{AB}}{E_i}$

OSSERVIAMO CHE LA SCRITTURA $\Delta E_M^{AB} = L_{NC}^{AB}$ È SOLO UN CASO GENERALE A PRESCINDERE DAL FATTO CHE LE FORZE SIANO TUTTE CONSERVATIVE O MENO. NEL CASO IN CUI LE FORZE SIANO TUTTE CONSERVATIVE $L_{NC}^{AB} = 0$ E QUINDI VALE IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA (IL CHE È QUINDI UNA SEMPLICE CONSEGUENZA).

IL TEMPO NON È ANNOVERATO TRA I PARAMETRI DA CUI DIPENDE L'ENERGIA MECCANICA. TUTTAVIA, NEL CASO DI NON CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA, VEDIAMO CHE C'È UN LEGAME INDIRETTO CON IL TEMPO.
CONSIDERIAMO UN BILIARDO: REGISTRIAMO UN FILMATO RIPRENDENDO SOLO UN'AREA CENTRALE.



LA PALLINA ROSSA È FERMA. ARRIVA UNA PALLINA BIANCA CHE URTA LA ROSSA, LA QUALE INIZIA A MUOVERSI, MENTRE LA BIANCA SI ARRESTA. SE CI SONO SOLO FORZE CONSERVATIVE, LA PALLINA ROSSA SI MUOVE CON LA STESSA VELOCITÀ CON CUI SI MUOVEVA LA BIANCA. VEDENDO IL FILMATO AL CONTRARIO, SI ASSISTE AD UN FENOMENO ANCORA PLAUSIBILE (LA PALLINA ROSSA CHE URTA LA BIANCA).
SE INVECE REGISTRIAMO IL FILMATO IN CASO DI FORZE NON CONSERVATIVE, LA PALLINA ROSSA SI METTE IN MOTO CON VELOCITÀ MINORE RISPETTO A QUELLA DELLA PALLINA BIANCA. GUARDANDO IL FILMATO AL CONTRARIO, ASSISTIAMO AD UN FENOMENO STRANO: LA PALLINA BIANCA SI MUOVE PIÙ VELOCEMENTE DI QUANTO FACESSE LA ROSSA.
SI DICE CHE IN CASO DI FORZE SOLO CONSERVATIVE È POSSIBILE INVERTIRE LA FRECCIA DEL TEMPO. CIÒ NON È POSSIBILE IN CASO DI FORZE ANCHE NON CONSERVATIVE.

MA L'ENERGIA MECCANICA CHE DIMINUISCE, DOVE VA? SI TRASFORMA IN UN DIVERSO TIPO DI ENERGIA: TERMICA. QUANDO SI MANIFESTA CALORE C'È UNA PERDITA DI ENERGIA MECCANICA E QUINDI SI PUÒ INVERTIRE LA FRECCIA DEL TEMPO. L'ENERGIA TERMICA È CONSIDERATA UN'ENERGIA "DI SERIE B" POICHÉ L'ENERGIA MECCANICA PUÒ ESSERE TRASFORMATA IN TERMICA, MENTRE QUEST'ULTIMA NON PUÒ ESSERE CONVERTITA IN MECCANICA.

L'ENERGIA TERMICA È DISORDINATA RISPETTO A QUELLA MECCANICA.

LA POTENZA È LA VELOCITÀ CON CUI VIENE FATTO UN LAVORO.

$$dW = \frac{dL}{dt} \qquad \int dW = \int \frac{dL}{dt}\,dt \qquad W = \int \frac{dL}{dt}\,dt$$

SI MISURA IN WATT: $1W = 1J/1s$

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

BISOGNA POTER MISURARE L'ENERGIA TERMICA. CREIAMO UNA NUOVA GRANDEZZA: LA TEMPERATURA.
PER UN CAMPIONE DI TEMPERATURA SERVE QUALCOSA DI STABILE IN TEMPERATURA. A PRESSIONE COSTANTE RESTANO FERMI IN TEMPERATURA I PUNTI DI [redacted] TRANSIZIONE DI STATO:

- A PRESSIONE ATMOSFERICA L'ACQUA DIVENTA GHIACCIO A 0°C
- A PRESSIONE ATMOSFERICA L'ACQUA DIVENTA AERIFORME A 100°C

DA UN PUNTO DI VISTA MICROSCOPICO, LA TEMPERATURA È L'AGITAZIONE DI MOLECOLE.

VIII

MECCANICA: STUDIA IL MOTO DEI CORPI
CINEMATICA: DESCRIVE I MOTI SENZA ANALIZZARNE LE CAUSE (FA PARTE DELLA MECCANICA)
DINAMICA: STUDIA LE CAUSE CHE GENERANO IL MOTO

NELLO STUDIO DEI MOTI SI FA LARGO USO DELL'ASTRAZIONE DEL PUNTO MATERIALE.
- POSIZIONE DEL PUNTO MATERIALE: $\bar{r}$
- VELOCITÀ DEL PUNTO MATERIALE: $\bar{v}$
- ACCELERAZIONE DEL PUNTO MATERIALE: $\bar{a}$

NECESSITA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO, ES. CARTESIANO: $\bar{r} = (r_x, r_y, r_z)$... POICHÉ SI TRATTA DI VETTORI.

LA VELOCITÀ MEDIA $\bar{v}$ È DEFINITA COME LO SPOSTAMENTO (VARIAZIONE DI POSIZIONE) DIVISO PER IL TEMPO TRASCORSO:

$\bar{v}_M = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ È UN VETTORE CON LA STESSA DIREZIONE E LO STESSO VERSO DEL VETTORE SPOSTAMENTO.
N.B. QUESTA VALUTAZIONE TIENE CONTO SOLTANTO DELLA POSIZIONE INIZIALE E FINALE, SENZA CONSIDERARE EVENTUALI CAMBIAMENTI DI DIREZIONE, ACCELERAZIONE, ECC.

L'ACCELERAZIONE MEDIA $\bar{a}$ È DEFINITA COME LA VARIAZIONE DI VELOCITÀ DIVISA PER IL TEMPO TRASCORSO:

$\bar{a}_M = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ HA LA STESSA DIREZIONE E LO STESSO VERSO DEL VETTORE VELOCITÀ.
ANCHE QUI, TRATTANDOSI DI ACCELERAZIONE MEDIA, NON SI TIENE CONTO DI ACCELERAZIONI DURANTE IL TEMPO TRASCORSO.

SE VOGLIAMO DESCRIVERE AL MEGLIO IL MOTO, BISOGNA CONOSCERLO ISTANTE PER ISTANTE. CONSIDERIAMO QUINDI POSIZIONE, VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE IN FUNZIONE DELL'ISTANTE DI TEMPO t: $\bar{r}(t)$, $\bar{v}(t)$, $\bar{a}(t)$.

LA VELOCITÀ ASSUNTA DAL CORPO ALL'ISTANTE t PUÒ ESSERE CALCOLATA A PARTIRE DALLA DEFINIZIONE DI VELOCITÀ MEDIA:

$$\bar{v}_M(\Delta t) = \frac{\bar{r}(t_i+\Delta t) - \bar{r}(t_i)}{\Delta t} \implies \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t_i+\Delta t) - \bar{r}(t_i)}{\Delta t}$$

RAPPRESENTA LA VELOCITÀ ISTANTANEA IN t_i
È UN RAPPORTO INCREMENTALE

$$\bar{v}(t_i) = \frac{d\bar{r}(t_i)}{dt}$$

DAL VETTORE POSIZIONE ALL'ISTANTE t_i SIAMO PASSATI AL VETTORE VELOCITÀ ISTANTANEA:

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r_x(t)\hat{\imath} + r_y(t)\hat{\jmath} + r_z(t)\hat{k}\right) =$$
$$= \frac{d}{dt} r_x(t)\hat{\imath} + \frac{d}{dt} r_y(t)\hat{\jmath} + \frac{d}{dt} r_z(t)\hat{k} =$$
$$= \hat{\imath}\frac{d}{dt} r_x(t) + \hat{\jmath}\frac{d}{dt} r_y(t) + \hat{k}\frac{d}{dt} r_z(t) =$$
$$= \hat{\imath} v_x(t) + \hat{\jmath} v_y(t) + \hat{k} v_z(t) =$$
$$= (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$$

LA DERIVATA DI UN VETTORE È LA SOMMA DELLE DERIVATE DELLE SUE COMPONENTI

ANALOGAMENTE, POSSIAMO PASSARE DAL VETTORE DELLA VELOCITÀ ALL'ISTANTE t AL VETTORE DELL'ACCELERAZIONE AL MEDESIMO ISTANTE t:

$$\bar{a}_M(\Delta t) = \frac{\bar{v}(t_i+\Delta t) - \bar{v}(t_i)}{\Delta t} \implies \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{v}(t_i+\Delta t) - \bar{v}(t_i)}{\Delta t}$$

$$\bar{a}(t_i) = \frac{d\bar{v}(t_i)}{dt}$$

IN SINTESI:

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{cases} \implies \bar{v}(t) = \begin{cases} v_x = \frac{dr_x(t)}{dt} \\ v_y = \frac{dr_y(t)}{dt} \\ v_z = \frac{dr_z(t)}{dt} \end{cases} \implies \bar{a}(t) = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2 r_x(t)}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2 r_y(t)}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2 r_z(t)}{dt} \end{cases}$$

DALLA POSIZIONE ISTANTANEA POSSIAMO DEDURRE VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE.

DERIVATE

DEFINITA COME IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{d(k)}{dt} = 0 \quad (k = \text{COSTANTE})$$

$$\frac{dt^n}{dt} = n \cdot t^{n-1}$$

$$\frac{d \ln t}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{de^t}{dt} = e^t$$

$$\frac{d \operatorname{sen} t}{dt} = \cos t$$

$$\frac{d \cos t}{dt} = -\operatorname{sen} t$$

$$\frac{d(f(t)+g(t))}{dt} = \frac{d(f(t))}{dt} + \frac{d(g(t))}{dt}$$

$$\frac{d(f(t)\cdot g(t))}{dt} = g(t)\cdot\frac{d(f(t))}{dt} + f(t)\cdot\frac{d(g(t))}{dt}$$

$$\frac{d\,\frac{f(t)}{g(t)}}{dt} = \frac{g(t)\,\frac{df(t)}{dt} - f(t)\,\frac{dg(t)}{dt}}{g(t)^2}$$

$$\frac{d(f(g(t)))}{dt} = \frac{df(g(t))}{dg(t)} \cdot \frac{dg(t)}{dt}$$

ESEMPIO

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} r_x(t) = A \operatorname{sen} kt \\ r_y(t) = B \cdot e^{\lambda t} \\ r_z(t) = C \end{cases} \Rightarrow \bar{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = Ak \cos kt \\ v_y(t) = B\lambda e^{\lambda t} \\ v_z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = -Ak \operatorname{sen} kt \\ a_y(t) = B\lambda^2 e^{\lambda t} \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

PARTENDO DAL VETTORE DELLA POSIZIONE ISTANTANEA È POSSIBILE TROVARE IL VETTORE VELOCITÀ ISTANTANEA ED IL VETTORE ACCELERAZIONE ISTANTANEA. ANALOGAMENTE, SI PUÒ PROCEDERE ANCHE NEL SENSO INVERSO:

$$\bar{a}(t)=\begin{cases} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t)\end{cases} \Rightarrow \bar{v}(t)=\begin{cases} v_x(t)=\int a_x(t)\,dt + cost._x \\ v_y(t)=\int a_y(t)\,dt + cost._y \\ v_z(t)=\int a_z(t)\,dt + cost._z\end{cases} \Rightarrow \bar{r}(t)=\begin{cases} r_x(t)=\int v_x(t)\,dt + cost'_x \\ r_y(t)=\int v_y(t)\,dt + cost'_y \\ r_z(t)=\int v_z(t)\,dt + cost'_z\end{cases}$$

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE CASO: UN CORPO SI MUOVE CON ACCELERAZIONE NULLA ~~VERSO~~ LUNGO L'ASSE x E CON ACCELERAZIONE COSTANTE DOVUTA ALLA GRAVITÀ VERSO IL BASSO, CON UNA CERTA VELOCITÀ INIZIALE:

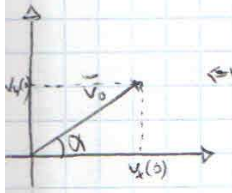
$$\bar{a}(t)=\begin{cases} a_x(t)=0 \\ a_y(t)=-g=-9.81\,m/s^2\end{cases} \Rightarrow \bar{v}(t)=\begin{cases} v_x(t)=\int a_x(t)dt + cost_x = \int 0\,dt + cost._x = cost._x \\ v_y(t)=\int a_y(t)dt + cost_y = \int -g\,dt + cost_y = -g\int dt + cost_y = -gt + cost_y\end{cases}$$

VEDIAMO CHE IL CORPO SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME LUNGO L'ASSE x E DI MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO VERSO IL BASSO. DOBBIAMO PERÒ INDIVIDUARE $cost_x$ E $cost_y$. ESSE NON SONO ALTRO CHE LE COMPONENTI DEL VETTORE INIZIALE $v(0)$: $v_x(0)=v_0\cos\alpha$ $\quad v_y(0)=v_0\,sen\,\alpha$.

$$\bar{v}(t)=\begin{cases} v_x(t)=v_0\cos\alpha \\ v_y(t)=-gt+v_0\,sen\,\alpha\end{cases} \Rightarrow \bar{r}(t)=\begin{cases} r_x(t)=\int v_0\cos\alpha\,dt + cost'_x = v_0\cos\alpha\, t + cost'_x \\ r_y(t)=\int(-gt+v_0\,sen\,\alpha)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\,sen\,\alpha\, t + cost'_y\end{cases}$$

LE COSTANTI $cost'_x$ E $cost'_y$ SONO LE POSIZIONI INIZIALI DEL CORPO ALL'ISTANTE $t=0$. CONSIDERIAMOLE QUINDI NULLE.

$$\bar{r}(t)=\begin{cases} r_x(t)=v_0\cdot\cos\alpha\cdot t \\ r_y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\cdot sen\,\alpha\cdot t\end{cases}$$



← VETTORE VELOCITÀ CON CUI IL CORPO VIENE LANCIATO.

IN QUALCHE MODO, x E y SI INFLUENZANO, PROVOCANDO UN MOTO CURVO DEL CORPO, NEL NOSTRO CASO UNA CURVA QUADRICA. ESISTONO TRE TIPI DI CURVE QUADRICHE:

- PARABOLA
- IPERBOLE
- ELLISSE

CONSIDERIAMO $\bar{r}(t)$ ED ESTRAIAMO t DALLA PRIMA EQUAZIONE:

$$t=\frac{r_x(t)}{v_0\cdot\cos\alpha}=\frac{x}{v_0\cdot\cos\alpha} \qquad \text{(PER SEMPLICITÀ, } r_x(t)=x)$$

SOSTITUIAMO NELLA SECONDA EQUAZIONE:

$$r_y=-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cdot\cos^2\alpha}+\cancel{v_0}\cdot sen\,\alpha\cdot\frac{x}{\cancel{v_0}\cos\alpha}=-\frac{1}{2}g\cdot\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+tg\,\alpha\cdot x$$

IL CORPO HA UNA CURVA PARABOLICA COME ANDAMENTO:

A CHE DISTANZA IL CORPO TOCCA TERRA?
CALCOLIAMO QUINDI IN CHE PUNTO LA PARABOLA SI INTERSECA CON L'ASSE DELLE ASCISSE:

$$-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+tg\,\alpha\cdot x = x\left(-\frac{1}{2}g\frac{x}{v_0^2\cos^2\alpha}+tg\,\alpha\right)=0$$

CHIAMIAMO x_G LA GITTATA, OVVERO LA DISTANZA A CUI IL CORPO TOCCA TERRA:

$$-\frac{1}{2}g\frac{x_G}{v_0^2\cos^2\alpha}+tg\,\alpha=0 \Rightarrow \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_G=tg\,\alpha \Rightarrow x_G=tg\,\alpha\cdot\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}$$

$$x_G=\frac{sen\,\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot\frac{2v_0^2\cos^{\cancel{2}}\alpha}{g}=\frac{2v_0^2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{g}$$

$$x_G=\frac{2v_0^2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{g}$$ ← FORMULA DELLA GITTATA QUANDO L'OGGETTO PARTE DALL'ORIGINE

QUAL È L'ANGOLO DI ALZO CHE MASSIMIZZA LA GITTATA?
BISOGNA TROVARE IL PUNTO IN CUI X_G ASSUME VALORE MASSIMO. LE DERIVATE CI CONSENTONO DI CONOSCERE:
- PUNTI DI MASSIMO
- PUNTI DI MINIMO
- PUNTI DI FLESSO

FACCIAMO QUINDI LA DERIVATA DI X_G:

$$\frac{d\,x_G(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d\, 2v_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g\, d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\frac{d \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos\alpha\cdot(\cos\alpha) + \operatorname{sen}\alpha\cdot(-\operatorname{sen}\alpha)\right) =$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)$$

LA DERIVATA DEVE VALERE 0:

$$\frac{2v_0^2}{g}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha = 45°$$

QUAL È IL PUNTO PIÙ ALTO RAGGIUNTO DAL CORPO?
- SE $\alpha = 45°$ È OVVIAMENTE IL PUNTO X CHE SI TROVA A METÀ GITTATA
- POSSIAMO CALCOLARLO VERIFICANDO IN QUALE PUNTO LA VELOCITÀ LUNGO L'ASSE Y DIVENTA NULLA (IL CORPO PRIMA SALE, POI SI FERMA PER UN ISTANTE, POI RISCENDE).

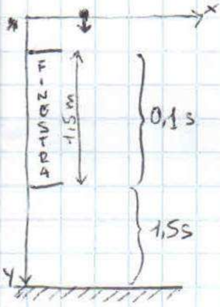
LA VELOCITÀ $v_y(t)$ ALL'ISTANTE t È:

$$v_y(t) = -g t_{MAX} + v_0 \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad g t_{MAX} = v_0 \operatorname{sen}\alpha \quad\Rightarrow\quad t_{MAX} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

ORA CHE SI CONOSCE L'ISTANTE DI TEMPO t IN CUI IL CORPO RAGGIUNGE L'ALTEZZA MASSIMA, BASTA SOSTITUIRE t_{MAX} ALL'EQUAZIONE $r_x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$ E $r_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

ESERCIZIO 1

UN UOMO È PRIGIONIERO. NELLA CELLA C'È UNA SOLA FINESTRA DA CUI PUÒ FUGGIRE, MA NON CONOSCE L'ALTEZZA A CUI SI TROVA. DAVANTI ALLA FINESTRA CADE UNA PALLINA. LA FINESTRA È ALTA 1,5m. IL TEMPO IN CUI LA PALLINA ATTRAVERSA TUTTA L'ALTEZZA DELLA FINESTRA È 0,1 SECONDI. LA PALLINA CONTINUA A CADERE, RIMBALZA SUL SUOLO E RICOMPARE ALL'ALTEZZA DEL DAVANZALE DOPO 1.5 SECONDI.
QUAL È LA DISTANZA TRA LA FINESTRA ED IL SUOLO?



LA PALLINA È UN CORPO IN CADUTA LIBERA, E QUINDI UNIFORMEMENTE ACCELERATO CON ACCELERAZIONE $g = 9{,}81\ m/s^2$.
SIANO:
- t_1 = ISTANTE IN CUI LA PALLINA COMPARE
- t_2 = ISTANTE IN CUI LA PALLINA SUPERA IL DAVANZALE
- t_3 = ISTANTE IN CUI LA PALLINA TOCCA IL SUOLO
- t_4 = ISTANTE IN CUI LA PALLINA RICOMPARE ALL'ALTEZZA DEL DAVANZALE

$t_2 - t_1 = 0{,}1\,s \qquad t_4 - t_2 = 1{,}5\,s \qquad r_y(t_2) - r_y(t_1) = 1{,}5\,m$

$$\bar{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = g = 9{,}81\ m/s^2 \end{cases} \qquad \bar{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = gt \end{cases} \qquad \bar{r}(t) = \begin{cases} r_x(t) = 0 \\ r_y(t) = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

SAPPIAMO CHE:

$$r_y(t_1) = \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad r_y(t_2) = \frac{1}{2} g t_2^2 \qquad r_y(t_2) - r_y(t_1) = 1{,}5\,m$$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} 0{,}5 \cdot g \cdot t_2^2 - 0{,}5 \cdot g \cdot t_1^2 = 1{,}5 \\ t_2 - t_1 = 0{,}1\,s \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}5 \cdot g (t_2^2 - t_1^2) = 1{,}5 \\ t_2 - t_1 = 0{,}1 \end{cases} \quad \begin{cases} t_2^2 - t_1^2 = 0{,}31 \\ t_2 - t_1 = 0{,}1 \end{cases} \quad \begin{cases} (t_2 - t_1)(t_2 + t_1) = 0{,}31 \\ t_2 - t_1 = 0{,}1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 + t_1 = 3{,}1 \\ t_2 = t_1 + 0{,}1 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 + 0{,}1 + t_1 = 3{,}1 \\ t_2 = t_1 + 0{,}1 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 1{,}5\,s \\ t_2 = 1{,}6\,s \end{cases}$$

TROVATI GLI ISTANTI DI TEMPO t_1 E t_2, POSSIAMO CONOSCERE SPAZIO PERCORSO E VELOCITÀ DELLA PALLINA in t_1 E t_2. TUTTAVIA CI BASTA CONOSCERE LO SPAZIO PERCORSO DALLA PALLINA ALL'ISTANTE t_3:

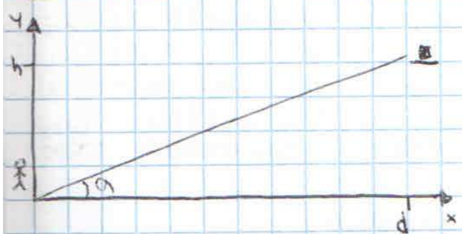
$t_3 = t_2 + 0{,}75 = 1{,}6 + 0{,}75 = 2{,}35\,s$

$z_y(t_3) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot (2{,}35)^2 = 27{,}09\,m$

LO SPAZIO TRA LA FINESTRA E IL SUOLO È:

$z_y(t_3) - z_y(t_2) = 27{,}09 - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}6^2 = 27{,}09 - 12{,}56 = \underline{14{,}53\,m}$

ESERCIZIO 2



UN ABORIGENO SCAGLIA UNA FRECCIA IN DIREZIONE DELLA SCIMMIA CHE SI TROVA AD ALTEZZA h. CONTEMPORANEAMENTE, LA SCIMMIA SI LASCIA CADERE VERSO IL BASSO. SAPENDO CHE LA FRECCIA È SCAGLIATA FORMANDO UN ANGOLO α CON IL SUOLO E CHE LA SCIMMIA DISTA d DALL'ABORIGENO SULL'ASSE DELLE ASCISSE, CALCOLARE LA CONDIZIONE SECONDO CUI LA SCIMMIA VIENE COLPITA DALLA FRECCIA.

LA FRECCIA SI MUOVE DI MOTO PARABOLICO, MENTRE LA SCIMMIA DI MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO. IL SISTEMA CARTESIANO DI RIFERIMENTO HA ORIGINE NEL PUNTO IN CUI SI TROVA L'ABORIGENO. CALCOLIAMO LE COORDINATE DELLA FRECCIA E DELLA SCIMMIA ALL'ISTANTE t:

SCIMMIA

$x_S = d$

$y_S = -\frac{1}{2} g t^2 + h$

FRECCIA

$x_F = v_0 \cos\alpha \cdot t$

$y_F = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t$

AFFINCHÉ LA FRECCIA COLPISCA LA SCIMMIA DEVONO CORRISPONDERE LE RELATIVE COORDINATE ALL'ISTANTE t_0:

$x_F = x_S \Rightarrow v_0 \cos\alpha\, t_0 = d \Rightarrow v_0 t_0 = d/\cos\alpha$

$y_F = y_S \Rightarrow \cancel{-\frac{1}{2} g t_0^2} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t_0 = \cancel{-\frac{1}{2} g t_0^2} + h \Rightarrow v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t_0 = h \Rightarrow v_0 t_0 = h/\operatorname{sen}\alpha$

UGUAGLIANDO $v_0 t_0$ AD ENTRAMBI I RISULTATI:

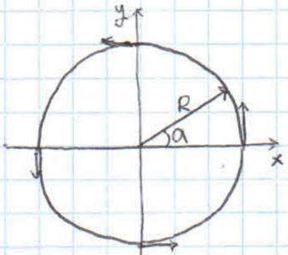
$\frac{d}{\cos\alpha} = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow d \operatorname{sen}\alpha = h \cos\alpha \Rightarrow d \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = h \Rightarrow \underline{d \cdot \operatorname{tg}\alpha = h}$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

- LA TRAIETTORIA DEL CORPO È UNA CIRCONFERENZA
- IL MODULO DELLA VELOCITÀ CON CUI IL CORPO SI MUOVE È COSTANTE (⇒ UNIFORME). QUESTO POTREBBE FAR ERRONEAMENTE PENSARE CHE NON C'È ACCELERAZIONE (COME NEL MOTO RETTILINEO UNIFORME). IN REALTÀ C'È UN'ACCELERAZIONE CHE DETERMINA IL CAMBIAMENTO CONTINUO DELLA DIREZIONE, DETERMINANDO COSÌ LA CARATTERISTICA CIRCOLARE DEL MOTO.

I PARAMETRI COSTANTI SONO DUE: IL RAGGIO R DELLA CIRCONFERENZA ED IL MODULO v_0 DELLA VELOCITÀ.

SISTEMA DI RIFERIMENTO: ASSI CARTESIANI CON ORIGINE NEL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA.



IL RAGGIO PUÒ ESSERE VISTO COME UN VETTORE DAL MODULO COSTANTE E DIREZIONE IN CONTINUO CAMBIAMENTO, CHE ALTRO NON È CHE LA POSIZIONE DEL CORPO ALL'ISTANTE DI TEMPO t. LA POSIZIONE DEL CORPO È QUINDI DETERMINATA DA:

- RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA
- ANGOLO α ALL'ISTANTE DI TEMPO t, DENOTATO COME $\alpha(t)$.

$$\bar{R}(t) = \begin{cases} x(t) = R \cdot \cos\alpha(t) \\ y(t) = R \cdot \operatorname{sen}\alpha(t) \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -R \operatorname{sen}\alpha(t) \cdot \dfrac{d\alpha(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = R\cos(t) \cdot \dfrac{d\alpha(t)}{dt} \end{cases}$$

ORA CI SERVE SAPERE COME CAMBIA NEL TEMPO L'ANGOLO α, CIOÈ ESPRIMERE α IN FUNZIONE DI t. PER FARE CIÒ, CALCOLIAMO PRIMA IL MODULO DELLA VELOCITÀ CHE, COME GIÀ DETTO, È COSTANTE:

$$v_0 = \sqrt{\left(-R\operatorname{sen}\alpha(t)\cdot\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2 + \left(R\cos\alpha(t)\cdot\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2\operatorname{sen}^2\alpha(t)\cdot\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2 + R^2\cos^2\alpha(t)\cdot\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2\left(\operatorname{sen}^2\alpha(t)+\cos^2\alpha(t)\right)} = \sqrt{R^2\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2} = \pm R\frac{d\alpha(t)}{dt}$$

DOBBIAMO CONSIDERARE SOLO IL VALORE POSITIVO POICHÈ IL MODULO DELLA VELOCITÀ NON PUÒ ESSERE NEGATIVO

DA CUI:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{v_0}{R} \Rightarrow \int\frac{d\alpha(t)}{dt}dt = \int\frac{v_0}{R}dt \Rightarrow \alpha(t) = \frac{v_0}{R}\int dt \Rightarrow \underline{\alpha(t) = \frac{v_0}{R}t + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\text{cost.}}}}$$

RIFORMULIAMO QUINDI I VETTORI POSIZIONE E VELOCITÀ IN FUNZIONE DI QUANTO EMERSO:

$$\bar{R}(t) = \begin{cases} x(t) = R\cos\left(\dfrac{v_0}{R}t\right) \\ y(t) = R\operatorname{sen}\left(\dfrac{v_0}{R}t\right) \end{cases} \qquad \bar{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = -\cancel{R}\cdot\dfrac{v_0}{\cancel{R}}\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{v_0}{R}t\right) = -v_0\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{v_0}{R}\cdot t\right) \\ v_y(t) = \cancel{R}\cdot\dfrac{v_0}{\cancel{R}}\cdot\cos\left(\dfrac{v_0}{R}t\right) = v_0\cdot\cos\left(\dfrac{v_0}{R}\cdot t\right) \end{cases}$$

CALCOLIAMO LA DIREZIONE DEL VETTORE VELOCITÀ (ANGOLO COMPRESO TRA ~~[illegible]~~ $\bar{v}(t)$ E L'ASSE x):

$$\operatorname{arctg}\frac{v_y(t)}{v_x(t)} = \operatorname{arctg}\frac{+\cancel{v_0}\cdot\cos(v_0/R\cdot t)}{-\cancel{v_0}\cdot\operatorname{sen}(v_0/R\cdot t)} = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{cotg}\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(90°+\alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90°+\alpha) &= \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{cotg}(90°+\alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \end{aligned}}$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(90°+\frac{v_0}{R}t\right)\right) =$$

$$= 90° + \alpha$$

IL VETTORE VELOCITÀ È SEMPRE PERPENDICOLARE RISPETTO ALL'ANGOLO α, CIOÈ È TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA.

IL VETTORE ACCELERAZIONE NON É NULLO. É INFATTI RESPONSABILE DEL CONTINUO CAMBIAMENTO DI DIREZIONE

$$\bar{R}(t) = \begin{cases} x(t) = R\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\left(\frac{v_0}{R}t\right) \end{cases} \qquad \bar{V}(t) = \begin{cases} v_x(t) = -v_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{v_0}{R}t\right) \\ v_y(t) = v_0\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) \end{cases} \qquad \bar{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = -\frac{v_0^2}{R}\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) \\ a_y(t) = -\frac{v_0^2}{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{v_0}{R}t\right) \end{cases}$$

IL VETTORE ACCELERAZIONE HA MODULO COSTANTE:

$$a_0 = \sqrt{\left(-\frac{v_0^2}{R}\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right)^2 + \left(-\frac{v_0^2}{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{v_0^4}{R^2}\cos^2\left(\frac{v_0}{R}t\right) + \frac{v_0^4}{R^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{v_0}{R}t\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{v_0^4}{R^2}\left(\cos^2\left(\frac{v_0}{R}t\right) + \mathrm{sen}^2\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right)} = \sqrt{\frac{v_0^4}{R^2}} = \frac{v_0^2}{R}$$

CALCOLIAMO LA DIREZIONE DELL'ACCELERAZIONE (ANGOLO COMPRESO TRA IL VETTORE E L'ASSE x):

$$\mathrm{arctg}\,\frac{a_y(t)}{a_x(t)} = \mathrm{arctg}\,\frac{\cancel{-v_0^2/R}\;\mathrm{sen}(v_0/R\cdot t)}{\cancel{-v_0^2/R}\cdot\cos(v_0/R\cdot t)} = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right) = \frac{v_0}{R}\cdot t = \alpha(t)$$

L'ANGOLO DEL VETTORE ACCELERAZIONE É LO STESSO DEL VETTORE POSIZIONE. L'ACCELERAZIONE É QUINDI UN VETTORE CHE ~~VERTE~~ VERSO IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA, ED É QUINDI DETTA ACCELERAZIONE CENTRIPETA.

ESEMPIO CONCRETO

CONSIDERIAMO UN'AUTOMOBILE CHE VIAGGIA CON MOTO RETTILINEO UNIFORME SU UNA STRADA ASCIUTTA. AD UN CERTO PUNTO SI PRESENTA UNA CURVA COMPLETAMENTE CIRCOLARE. L'AUTOMOBILE FA LA CURVA CON LA STESSA VELOCITÀ SENZA PROBLEMI.

CONSIDERIAMO UN CASO SIMILE, IN CUI IL FONDO STRADALE É RICOPERTO DI GHIACCIO. NEL MOMENTO IN CUI L'AUTOMOBILE FA LA CURVA, VA FUORI STRADA, PROSEGUENDO PER LA TANGENTE. QUESTO ACCADE PERCHÉ É CAMBIATO L'ATTRITO CON LA STRADA. GRAZIE A QUESTO ATTRITO SI MANIFESTA UN'ACCELERAZIONE CENTRIPETA CHE CONSENTE ALL'AUTO DI SEGUIRE LA TRAIETTORIA.

III