- LEZIONE 2 DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA -
A.A. 2006/2007

Silvio De Siena

1 Richiami di trigonometria, grandezze scalari e grandezze vettoriali, sistemi di riferimento Cartesiani

1.1 Richiami sulle definizioni delle grandezze trigonometriche

Prima di affrontare gli argomenti di questa sezione, conviene richiamare alcune definizioni e concetti di tipo trigonometrico che saranno utilizzati in seguito.

Funzioni trigonometriche

Il seno ed il coseno

Si consideri un triangolo *rettangolo* (cioè un triangolo nel quale uno degli angoli è retto (cioè, vale 90 gradi o, equivalentemente, $\pi/2$ radianti) (vedi Fig. 1 allegata). Indichiamo con a l'ipotenusa (ed anche la sua lunghezza) e con b, c i due cateti (ed anche le relative lunghezze). Indichiamo poi con α l'angolo formato tra il cateto b e l'ipotenusa, e con β l'angolo formato tra il cateto c e l'ipotenusa (ovviamente, b e c formano tra loro un angolo retto). Diciamo allora che l'angolo α è *adiacente* al cateto b ed è *opposto* al cateto c, mentre l'angolo β è *adiacente* al cateto c ed è *opposto* al cateto b.

Allora, definiamo il seno ed il coseno di un angolo nel modo seguente.

- Il *seno* di un angolo θ (simbolo: $\sin\theta$) è calcolato considerando un qualsiasi triangolo rettangolo che abbia θ come uno degli angoli, ed eseguendo il rapporto tra la lunghezza del cateto (del triangolo rettangolo scelto) che è opposto a θ, e l'ipotenusa dello stesso triangolo rettangolo.

- Il *coseno* di un angolo θ (simbolo: $\cos\theta$) è dato considerando un qualsiasi triangolo rettangolo che abbia θ come uno degli angoli ed eseguendo il rapporto tra il cateto (del triangolo rettangolo scelto) che è adiacente a θ, e l'ipotenusa dello stesso triangolo rettangolo.

In base a queste definizioni, se ci rifacciamo al triangolo rettangolo considerato all'inizio, di lati a, b, c e con angoli α (adiacente a b, opposto a c), β (adiacente a c, opposto a b), allora abbiamo:

$$\sin\alpha \doteq \frac{c}{a}\ ,\ \sin\beta \doteq \frac{b}{a}\ ,\ \cos\alpha \doteq \frac{b}{a}\ ,\ \cos\beta \doteq \frac{c}{a}\ . \tag{1}$$

Nota importante: la proiezione di un segmento su una retta. Questo sarà un concetto che useremo spesso in seguito, e quindi è bene trattarlo preliminarmente. Se abbiamo un segmento di lunghezza L che ha il suo punto iniziale A su una retta e forma un angolo θ con la retta stessa, la proiezione di questo segmento sulla retta data si ottiene tracciando, a partire dal punto finale B del segmento, la perpendicolare alla retta, ed individuandone il punto di intersezione C con la retta. Allora, il tratto AC sulla retta (che supporremo di lunghezza l) rappresenta la proiezione del segmento AB sulla retta. Si noti che il triangolo ABC è un triangolo rettangolo, di cui la proiezione AB costituisce il cateto adiacente all'angolo θ tra il segmento e la retta, e il segmento AB costituisce l'ipotenusa. Dalla definizione di coseno abbiamo quindi che la lunghezza l della proiezione AC è data da

$$l = L\cos\theta. \tag{2}$$

Relazioni trigonometriche

Dalla definizione data di seno e coseno si possono ricavare delle relazioni trigonometriche di grande utilità.

Si noti che, dalle relazioni (1), rileviamo, per confronto, che

$$\sin\alpha = \cos\beta\ ,\ \sin\beta = \cos\alpha\ . \tag{3}$$

Poichè è ben noto che la somma dei tre angoli di un rettangolo è sempre π (cioè 180 gradi), nel nostro caso di triangolo rettangolo, nel quale il terzo angolo è $\pi/2$ (cioè 90 gradi), abbiamo

$$\alpha + \beta + \pi/2 = \pi,$$

cioè

$$\alpha + \beta = \pi/2,$$

o anche

$$\alpha = \pi/2 - \beta \ , \ \beta = \pi/2 - \alpha.$$

Dalle relazioni (3) si ricava quindi la regola generale (valida per ogni angolo θ,

$$\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta \ , \ \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta \ . \tag{4}$$

Si noti anche che da questa relazione, sostituendo θ con $-\theta$ e considerando che il seno cambia di segno cambiando il segno dell'angolo mentre il coseno no, si ottiene anche

$$\sin(\pi/2 + \theta) = \cos\theta \ , \ \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta \ . \tag{5}$$

Sostituendo poi nelle relazioni (5) θ con $\theta + \pi/2$, si ottiene

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta \ , \ \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \ . \tag{6}$$

Infine, sostituendo nelle relazioni (6) θ con $-\theta$, si ottiene

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \ , \ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \ . \tag{7}$$

Tutte queste relazioni trigonometriche possono essere utili.

Si noti ancora che se sostituisco nella relazione (6) θ con $\theta + \pi$, ottengo

$$\sin(\pi + (\theta + \pi)) = -\sin(\theta + \pi) = \sin(\theta) \ ,$$

$$\cos(\pi/2 + (\theta + \pi)) = -\cos(\theta + \pi) = \cos\theta \ , \tag{8}$$

cioè

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \ , \ \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \ ; \tag{9}$$

queste relazioni ci dicono che, come è ben noto, le funzioni trigonometriche sono *periodiche*, cioè che riacquistano i loro valori dopo un intervallo caratteristico che, in questo caso, è $2\,\pi$. Naturalmente, la (9) si può generalizzare come

$$\sin(\theta + 2\,n\pi) = \sin\theta\ ,\ \cos(\theta + 2\,n\pi) = \cos\theta\ , \tag{10}$$

dove n è un qualsiasi intero (positivo o negativo).

Notiamo anche che vale un'altra ben nota relazione. Infatti, dalle definizioni (1) e dalle relazioni (3), abbiamo, per esempio,

$$\sin^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2},$$

ed il Teorema di Pitagora ("la somma dei quadrati di un triangolo rettangolo è uguale al quadrato dell'ipotenusa") ci dice che l'ultimo rapporto vale 1, cioè che per ogni angolo α vale la relazione

$$\sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \tag{11}$$

Altre funzioni trigonometriche

- La *tangente* di un angolo θ (simbolo: $\tan\theta$) è definita come il rapporto tra il seno di θ ed il coseno di θ: $\tan\theta \doteq \sin\theta/\cos\theta$.

Dalle definizioni di seno e coseno con un triangolo rettangolo è chiaro che la tangente di un angolo esprime il rapporto tra il cateto opposto all'angolo ed il cateto adiacente all'angolo:

$$\tan\alpha \doteq \sin\alpha/\cos\alpha \equiv (\frac{c}{a})/(\frac{b}{a}) = \frac{c}{a}\,\frac{a}{b} = \frac{c}{b}.$$

- La *cotangente* di un angolo θ (simbolo: $\cot\theta$) è definita come: $\cot\theta \doteq 1/\tan\theta \equiv \cos\theta/\sin\theta$.

Alcuni valori notevoli di funzioni trigonometriche

Le definizioni delle funzioni trigonometriche permettono di calcolare, almeno in modo arbitrariamente approssimato, il valore che tali funzioni assumono per ogni argomento della variabile. Tuttavia, per alcuni angoli particolari è possibile calcolare esattamente il valore della funzione, ed è bene che questi casi vengano memorizzati.

Cominciamo col notare che gli argomenti delle funzioni trigonometriche rappresentano degli angoli, che possono essere espressi sia in *gradi*, sia in *radianti*. Come tutti sanno, una circonferenza è divisa in 360 "spicchi", ciascuno dei quali contiene un angolo di 1 grado. Quindi, un angolo retto, che prende un quarto dell'angolo totale della circonferenza, vale $360/4 = 90$ gradi, l'angolo piatto, che ne prende un mezzo, vale $360/2 = 180$ gradi, e così via. D'altra parte, un angolo α è definito come il rapporto tra l'arco s che questo angolo sottende in una qualsiasi circonferenza e il raggio R di questa circonferenza: $\alpha \doteq s/R$. Poiché la lunghezza di una circonferenza è $s_C = 2\ \pi\ R$, e la circonferenza rappresenta l'arco massimo, abbiamo che l'angolo massimo vale, secondo questa definizione, $2\ \pi$; quando misuriamo in questo modo gli angoli, adottiamo un'unità di misura che prende il nome di "radiante". Quindi, l'angolo massimo sotteso dalla circonferenza vale "$2\ \pi$ radianti". Ma noi sappiamo che questo angolo vale anche 360 gradi; otteniamo così il metodo di conversione tra radianti e gradi, e viceversa. Infatti, è chiaro che 360 gradi $\equiv 2\ \pi$ radianti. È anche chiaro per esempio che 90 gradi $\equiv 360/4 \equiv 2\ /4 \equiv \pi/2$ radianti, ecc. In generale, se un angolo α vale δ gradi, lo stesso angolo vale, in radianti,

$$\alpha = 2\ \pi \cdot \frac{\delta}{360}.$$

Da ora in poi useremo il simbolo *rad* per indicare i radianti, mentre useremo l'usuale cerchietto in alto a sinistra per indicare i gradi (per esempio 90° indicherà 90 gradi).

A questo punto possiamo fare un'elenco dei valori di seno e coseno di angoli notevoli:

$$\begin{aligned}
&\sin\ 30^\circ \equiv \sin\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \cos\ 30^\circ \equiv \cos\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \\
&\sin\ 60^\circ \equiv \sin\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos\ 60^\circ \equiv \cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ ; \\
&\sin\ 45^\circ \equiv \sin\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \cos\ 45^\circ \equiv \cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ; \\
&\sin\ 90^\circ \equiv \sin\ \frac{\pi}{2} = 1 \quad ; \quad \cos\ 90^\circ \equiv \cos\ \frac{\pi}{2} = 0\ .
\end{aligned} \tag{12}$$

I valori per altri angoli, come per esempio $120° \equiv 90° + 30° \equiv \pi/2 + \pi/6$, possono essere ricavate dalle relazioni (4) - (11).

1.2 Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Una volta introdotto il concetto di grandezze fisiche, vedremo che tali grandezze si possono dividere, dal punto di vista della loro caratterizzazione, in due grandi categorie: le grandezze *scalari* e le grandezze *vettoriali.* Procediamo quindi nel seguito a descriverne le proprietà.

Grandezze scalari

Una grandezza scalare è definita assegnando un *numero* che, nel caso di grandezza fisica, ne rappresenta la misura in un certo sistema di unità di misura, e la caratterizza completamente. Esempi di grandezze scalari sono la massa o la temperatura di un corpo, la frequenza di un suono ecc. Ne consegue che la regola di composizione di due grandezze scalari è molto semplice, riducendosi alla somma algebrica dei numeri che le caratterizzano. Quindi, se unisco nello stesso recipiente due quantità di acqua ciascuna delle quali ha la massa di 1 Kg ottengo una quantità di 1 $Kg + 1\ Kg = 2\ Kg$ di acqua.

Il simbolo che usiamo per indicare una grandezza scalare è semplicemente una lettera (m per una massa, T per una temperatura, ecc.)

Grandezze vettoriali

Una grandezza vettoriale è definita assegnando tre proprietà: il *modulo o intensità*, la *direzione* e il *verso.* Il simbolo che useremo per indicare un vettore sarà una lettera sovrastata da una freccetta: $\vec{v}$, $\vec{u}$ ecc. Indicheremo invece il modulo di un vettore $\vec{v}$ con il simbolo $|\vec{v}|$, o semplicemente, omettendo la freccetta, con v.

Un vettore si rappresenta graficamente disegnando una "freccetta" (vedi Fig. 2 allegata), la cui lunghezza rappresenta (su una certa scala grafica) il modulo; la retta contenente la freccetta rappresenta invece la direzione del vettore, mentre la freccia indica il verso, che è uno dei due possibili versi nei quali si può percorrere la retta indicante la direzione.

Grandezze fisiche vettoriali sono la velocità, l'accelerazione, la forza ecc. Per chiarire la definizione immaginiamo di considerare un'automobile che percorre un tratto rettilineo dell'autostrada del Sole. Allora, il vettore che definisce la sua velocità ha modulo pari al numero segnato dal tachimetro (per esempio, 100 chilometri all'ora), e direzione data dalla retta che comprende il tratto rettilineo; il verso può essere quello da Roma a Milano o quello, opposto, da Milano a Roma.

Operazioni coi vettori

È spesso necessario *comporre* tra di loro due o più vettori trovandone la *risultante*; questo corrisponde a definire somme o differenze di vettori. Inoltre, per i vettori si intrducono anche certi tipi di prodotti, e la moltiplicazione (o la divisione) per uno scalare. Nel seguito definiremo queste operazioni.

<u>Somma e differenza tra vettori</u>:

La somma di due vettori è un altro vettore che si ottiene per costruzione grafica disegnando i due vettori dati in modo che partano dallo stesso punto (punto di applicazione), disegnando poi il parallelogramma di lati pari ai moduli dei due vettori dati, e disegnando infine il vettore (vettore somma vettoriale dei due vettori dati) che ha lunghezza pari alla diagonale maggiore del parallelogramma, direzione coincidente con tale diagonale, e verso che si allontana dal punto comune di applicazione dei due vettori (vedi Fig. 3 allegata).

La differenza di due vettori è un altro vettore che si ottiene per costruzione grafica disegnando i due vettori dati in modo che partano dallo stesso punto (punto di applicazione), e congiungendo poi tra loro i vertici dei due vettori dati; il vettore differenza ha allora modulo pari alla lunhezza di questa congiungente (che non è altro che la diagonale minore del parallelogramma che ha per lati i due vettori), direzione della stessa congiungente, e verso diretto dal vertice del vettore dal quale si sottrae al vertice del vettore sottratto: se, cioè faccio $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, ottengo un vettore il cui verso va dal vertice di $\vec{v}_1$ a quello di $\vec{v}_2$ (vedi Fig. 3 allegata).

<u>Prodotti di vettori con scalari</u>:

Il prodotto di un vettore $\vec{v}$ con uno scalare α, che indicheremo con $\alpha\ \vec{v}$, è definito come quel vettore che ha la stessa direzione di $\vec{v}$, modulo pari a $|\alpha|\ |\vec{v}|$, e verso che coincide con quello di $\vec{v}$ se α è un numero positivo, mentre è opposto a quello di $\vec{v}$ se α è negativo. Per esempio, se $\alpha = 2$ abbiamo che

$\alpha\,\vec{v} \equiv 2\,\vec{v}$ è un vettore che ha modulo pari a due volte quello di $\vec{v}$, direzione e verso uguali a quelli di $\vec{v}$. Se invece $\alpha = -3$ abbiamo che $\alpha\,\vec{v} \equiv -3\,\vec{v}$ è un vettore che ha modulo pari a tre volte quello di $\vec{v}$, direzione uguale a quella di $\vec{v}$, ma verso opposto a $\vec{v}$. Si noti, per inciso, che quindi il vettore con $-\vec{v}\, equiv (-1)\vec{v}$ possiamo indicare quel vettore che ha modulo e direzione uguali a $\vec{v}$, ma verso opposto.

Notiamo che dividere un vettore per uno scalare equivale a moltiplicare il vettore per l'inverso dello scalare. Se ora scegliamo, in particolare, come scalare per il quale dividere il vettore $\vec{v}$ il modulo $|\vec{v}|$ dello stesso vettore, il vettore

$$\vec{u} = \vec{v}/|\vec{v}|$$

risulta essere un vettore che ha la stessa direzione e verso del vettore originario $\vec{v}$, ma modulo 1 ($|\vec{u}| = 1$). Diciamo allora che $\vec{u}$ è un *versore*; in particolare $\vec{u}$ è il versore che individua la direzione ed il verso di tutti i vettori paralleli al vettore originario $\vec{v}$. Si noti anche che ogni vettore $\vec{v}_c$ che sia parallelo alla direzione di $\vec{u}$ e concorde con il suo verso si può scrivere come

$$\vec{v}_c = |\vec{v}_c|\,\vec{u},$$

mentre ogni vettore $\vec{v}_d$ che sia parallelo alla direzione di $\vec{u}$ e abbia verso opposto a quello di $\vec{u}$ si può scrivere come

$$\vec{v}_d = -|\vec{v}_d|\,\vec{u}.$$

Prodotti tra vettori:

Tra due vettori si possono eseguire due tipi di prodotti: il *prodotto scalare* ed il *prodotto vettoriale.*

Il *prodotto scalare* tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ è una quantità scalare che si indica con $\vec{v}\cdot\vec{u}$, ed è data da

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta\ , \tag{13}$$

dove θ indica l'angolo formato tra i due vettori, e $\cos\theta$ il coseno di questo angolo. Si noti che, se i due vettori formano un agngolo retto (cioè di 90 gradi o, in radianti, di $\pi/2$), allora il coseno si annulla e il prodotto scalare si annulla. Invece su i due vettori sono paralleli (e quindi formano un angolo nullo) il coseno vale 1 ed il prodotto scalare è masssimo. Infine, se i vettori sono anti-paralleli (cioè sono sulla stessa retta ma hanno verso opposto) allora formano un angolo di 180 gradi (o di π in radianti), il coseno vale -1, e il prodotto scalare vale $-|\vec{v}||\vec{u}|$. Infine, dalla definizione il prodotto scalare è invariante per scambio dei vettori, cioè:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}.$$

Notiamo anche che possiamo scrivere il prodotto scalare tra $\vec{v}$ e $\vec{u}$ come

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (|\vec{v}|\ \cos\theta)\ |\vec{u}| \equiv (|\vec{u}|\ \cos\theta)\ |\vec{v}|.$$

Notiamo quindi che, dalla discusione precedente sulla proiezione di un segmento sulla retta e dalla relazione (2), il prodotto scalare può essere interpretato come il prodotto tra il modulo di uno dei due vettori e la proiezione dell'altro vettore sulla direzione del primo.

Il *prodotto vettoriale* tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ è una quantità vettoriale, che si indica con $\vec{v} \wedge \vec{u}$, ed è quindi definita dandone modulo, direzione e verso come segue.

Il modulo del prodotto vettoriale è dato da

$$|\vec{v} \wedge \vec{u}| = |\vec{v}||\vec{u}||\sin\theta|,$$

dove sin indica il seno (si noti come in questo caso il modulo è massimo per $\theta = \pi/2$ (vettori perpendicolari), e nullo per $\theta = 0, \pi$ (vettori sulla stessa retta).

La direzione del prodotto vettoriale è quella perpendicolare al piano individuato dai due vettori.

Il verso è quello di una vite che avanza girando nel verso che sovrappone il primo vettore al secondo vettore. I due versi possibili sono quello orario (se si gira nel verso delle lancette dell'orologio) e quello antiorario (se si gira nel verso opposto).

Quindi, se disegnamo due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sulla lavagna, con $|\vec{v}| = 2$ e $|\vec{u}| = 3$, ed i due vettori formano tra loro un angolo di 30 gradi (il cui seno vale $1/2$), il loro prodotto vettoriale avrà modulo pari a $2 \cdot 3 \cdot \sin\ 30 = 3$, direzione perpendicolare alla lavagna (che è il piano individuato dai due vettori), e verso che entra nella lavagna se, sovrapponendo $\vec{v}$ a $\vec{u}$, giro in verso orario, e invece verso che esce dalla lavagna se, sovrapponendo $\vec{v}$ a $\vec{u}$, giro in verso antiorariorario.

È chiaro che, contrariamente al caso del prodotto scalare, nel caso del prodotto vettoriale se scambio i vettori cambio anche il verso, cioè cambio il segno:

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

1.3 Sistemi di riferimento Cartesiani

Per poter individuare, per esempio, la posizione di un corpo è necessario avere a disposizione un *sistema di riferimento.* I sistemi di riferimento più convenienti sono i *sistemi di riferimento Cartesiani.* Un sistema di riferimento Cartesiano è basato su tre assi tra loro perpendicolari che si incontrano in un punto O detto origine (vedi Fig. 4 allegata); per ogni asse viene inoltre scelto un verso positivo. I tre assi li indicheremo con asse X, asse Y, asse Z. In questo modo, la posizione di un qualsiasi punto P nello spazio può essere individuata da un vettore $\vec{s}$ applicato nell'origine (che chiameremo vettore posizione), la cui direzione è la retta che passa per l'origine e per il punto P, ed il cui verso è quello che va da O a P (vedi Fig. 4 allegata). A questo punto, possiamo individuare le due proiezioni del vettore $\vec{s}$ sull'asse Z e sul piano (X, Y) individuato dagli assi X e Y; le proiezioni saranno costruite tracciando le perpendicolari all'asse Z e al piano (X, Y) che partono dal vertice del vettore $\vec{s}$, e andando ad individuare i loro punti di intersezione con l'asse Z e con il piano (X, Y). Se chiamiamo queste due intersezioni rispettivamente Q ed S, vediamo che il tratto che congiunge l'origine O con Q (orientato nel verso che va da O a Q) definisce un vettore sull'asse Z che chiameremo il vettore componente di $\vec{s}$ rispetto all'asse Z, e che indicheremo con $\vec{z}$; mentre il tratto che congiunge l'origine O con S (orientato nel verso che va da O a S) definisce un vettore sul piano (X, Y) che chiameremo il vettore componente di $\vec{s}$ rispetto al piano (X, Y),e che indicheremo con $\vec{s}_{x,y}$. È chiaro che il vettore posizione $\vec{s}$ è la somma vettoriale dei vettori componenti $\vec{z}$ e $\vec{s}_{x,y}$.

Adesso, possiamo con lo stesso metodo trovare le proiezioni del vettore $\vec{s}_{x,y}$ rispetto all'asse X e all'asse Y, e chiameremo i rispettivi vettori componenti $\vec{x}$ (che sta sull'asse X) e $\vec{y}$ (che sta sull'asse Y). È ora chiaro che il vettore $\vec{s}_{x,y}$ è la somma vettoriale dei vettori componenti $\vec{x}$ e $\vec{z}$, e che quindi il vettore posizione $\vec{s}$ è la somma vettoriale dei tre vettori componenti $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ (diretti lungo i tre assi)

$$\vec{s} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}.$$

Abbiamo quindi scomposto il vettore $\vec{s}$ in vettori componenti. Ora indichiamo con x il numero che si ottiene prendendo $|\vec{x}|$ se il vettore $\vec{x}$ punta nel verso positivo dell'asse X, e $-|\vec{x}|$ se invece il vettore $\vec{x}$ punta nel verso negativo dell'asse X; definiamo poi in modo analogo (in riferimento ai vettori $\vec{y}$, $\vec{z}$, e agli assi Y, Z) i numeri y e z. Allora. è chiaro che il vettore $\vec{s}$, ed il punto P al quale è associato, sono completamente definiti specificando la terna ordinata (x, y, z) che chiameremo *componenti del vettore $\vec{s}$, o anche coordinate della posizione del punto P rispetto al sistema Cartesiano scelto.* Infatti, definiamo ora i versori $\hat{i}, \hat{k}, \vec{l}$ dei tre assi X, Y, Z come i vettori di modulo 1 diretti lungo, rispettivamente, gli assi X, Y, Z nel loro verso positivo. Allora, è chiaro per quanto detto in precedenza che, qualsiasi sia il punto P prescelto di componenti (x, y, z), si può scrivere

$$\vec{x} = x\,\hat{i}\ ,\ \vec{y} = y\,\hat{k}\ ,\ \vec{z} = z\,\vec{l}.$$

Abbiamo usato le notazioni $\vec{s}$ per indicare il vettore che individua la posizione di un punto generico P, e (x, y, z) per le sue componenti sugli assi. Più in generale, potremo usare una notazione del tipo $\vec{v}$ per indicare un generico vettore, e una notazione del tipo v_1, v_2, v_3 (o, in altri casi, v_x, v_y, v_z) per indicare le sue componenti lungo i tre assi.

Quindi, da ora in poi, quando saremo in componenti Cartesiane, individueremo un punto nello spazio, o un vettore, assegnando le loro coordinate, o componenti, e useremo le notazioni

$$P \equiv (x, y, z),$$

$$\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3),$$

e le leggeremo, rispettivamente, come "il punto P di coordinate x, y, z", e "il vettore $\vec{v}$ di componenti v_1, v_2, v_3".

È chiaro che, continuando ad indicare con $\hat{i}, \hat{k}, \vec{l}$ i versori dei tre assi X, Y, Z, anche per un vettore generico $\vec{v}$ potremo scrivere

$$\vec{v} = v_1\,\hat{i} + v_2\,\hat{k} + v_3\,\vec{l}.$$

Da tutto quello che abbiamo detto, $P \equiv (-3, 2, 1)$ indicherà il punto di coordinata -3 lungo l'asse X, coordinata 2 lungo l'asse Y, coordinata 1 lungo l'asse Z; $\vec{v} \equiv (4, 3, -7)$ indicherà il vettore di componente 4 lungo l'asse X, componente 3 lungo l'asse Y, componente -7 lungo l'asse Z, e così via.

Da qunto detto in precedenza, vediamo anche che la componente lungo un asse di un vettore $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ si ottiene facendo il prodotto scalare del vettore stesso con il versore dell'asse prescelto:

$$v_1 = \vec{v} \cdot \hat{i} \ , \ v_2 = \vec{v} \cdot \hat{k} \ , \ v_3 = \vec{v} \cdot \hat{l} \ .$$

Modulo di un vettore in un sistema di riferimento Cartesiano

Per calcolare il modulo di un vettore in termini delle sue componenti Cartesiane notiamo che il segmento che rappresenta la lunghezza del vettore $\vec{s}$ (e quindi il suo modulo) è l'ipotenusa del triangolo rettangolo i cui un cateto ha lunghezza pari al modulo della componente z di $\vec{s}$ lungo l'asse Z, e l'altro cateto ha lunghezza pari al modulo della componenente $\vec{s}_{x,y}$ di $\vec{s}$ sul piano X, Y. Per il teorema di Pitagora abbiamo quindi

$$|\vec{s}|^2 = z^2 + |\vec{s}_{x,y}|^2.$$

D'altra parte, il vettore $\vec{s}_{x,y}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo i cui cateti hanno lunghezze uguali rispettivamente al modulo della componente x e a quello della componente y di $\vec{s}$. Ancora per il teorema di Pitagora abbiamo quindi

$$|\vec{s}_{x,y}|^2 = x^2 + y^2.$$

mettendo insieme le due ultime relazioni, abbiamo allora

$$|\vec{s}|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Il modulo di $\vec{s}$ in termini delle componenti è quindi

$$|\vec{s}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{14}$$

Ovviamente, se consideriamo un generico vettore $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$, abbiamo

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}. \tag{15}$$

Operazioni coi vettori in un sistema di riferimento Cartesiano

Vedremo ora come si possono esprimere le operazioni coi vettori precedentemente definite se ci poniamo in un sistema di riferimento Cartesiano, e quindi definiamo i vettori attraverso le loro componenti lungo gli assi X, Y, Z.

<u>Somma e differenza tra vettori</u>:

Se abbiamo due vettori in un riferimento Cartesiano, abbiamo visto che essi possono essere caratterizzati dalla loro tre componenti rispetto agli assi, e quindi scriviamo: $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$. Consideriamo adesso il vettore somma dato da $\vec{v} + \vec{u}$; il nostro problema è ricavarne le componenti lungo gli assi in termini delle componenti dei due vettori originari, dopo di che il vettore somma sarà completamente definito. La cosa è molto semplice perchè, dal fatto che la somma tra vettori è un'operazione *lineare*, e come si può vedere anche dalla costruzione grafica, il vettore somma ha componenti che si ottengono semplicemente sommando algebricamente le componenti omologhe dei due vettori originari: la componente su X sarà la somma della componente X del primo vettore con la componente X del secondo vettore ecc. Abbiamo quindi

$$\vec{v} + \vec{u} \equiv (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3).$$

Per esempio, se $\vec{v} \equiv (3, -4, 1)$ e $\vec{u} \equiv (-5, 2, 7)$, abbiamo

$$\vec{v} + \vec{u} \equiv (3 - 5, -4 + 2, 1 + 7) \equiv (-2, -2, 8).$$

Ovviamente, se facciamo la differenza tra due vettori, le componenti omologhe si sottraggono e abbiamo

$$\vec{v} - \vec{u} \equiv (v_1 - u_1, v_2 - u_2, v_3 - u_3).$$

Con gli stessivettori usati nel primo esempio abbiamo quindi

$$\vec{v} - \vec{u} \equiv (3 - (-5), -4 - 2, 1 - 7) \equiv (8, -6, -6).$$

Possiamo riassumere i casi di somma e differenza in un'unica formula

$$\vec{v} \pm \vec{u} \equiv (v_1 \pm u_1, v_2 \pm u_2, v_3 \pm u_3). \tag{16}$$

Come si vede, in un sistema di riferimento queste operazioni risultano più semplici da effettuare.

Prodotti tra vettori:

Sia il prodotto scalare che quello vettoriale tra due vettori possono essere espressi in componenti Cartesiane. Qui ci limiteremo a descrivere il prodotto scalare, poichè l'espressione di quello vettoriale risulta un po' più complesso e rinviamo la sua trattazione al momento nel quale eventualmente ci servirà usarlo.

Dati due vettori $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ in un sistema di riferimento Cartesiano, il loro prodotto scalare espresso tramite componenti è dato da

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1\, u_1 + v_2\, u_2 + v_3\, u_3 \ , \tag{17}$$

cioè, è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe.

Si può mostrare facilmente che le due definizioni (13) e (17) danno lo stesso risultato.

Esercizi

Esercizio 1): Quanto valgono $\sin 150° \ , \ \cos 150° \ , \ \tan 150° \ , \ \cot 150°$?

Esercizio 2): Tradurre in radianti i seguenti angoli:

$$45° \ , \ 120° \ , \ 150° \ , \ 240°.$$

Esercizio 3): Quanto valgono $\sin \frac{2\pi}{3} \ , \ \cos \frac{2\pi}{3} \ , \ \tan \frac{2\pi}{3} \ , \ \cot \frac{2\pi}{3}$?

Esercizio 4): Quanto vale l'ipotenusa di un triangolo rettangolo nel quale un cateto di lunghezza $2m$ forma con l'ipotenusa un angolo di $30°$?

Esercizio 5): Quanto vale la tangente di un angolo α di un triangolo rettangolo se il cateto opposto ad α ha lunghezza pari a $3m$, e l'ipotenusa ha lunghezza pari a $5m$?

Esercizio 6): Trovare graficamente (in scala) la somma di due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$, se $|\vec{v}| = 4$ e $|\vec{u}| = 3$, e se i due vettori formano tra loro un angolo retto. Calcolare anche $|\vec{v} + \vec{u}|$.

Esercizio 7): Calcolare le componenti della somma e della differenza di due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$, di componenti (in un sistema di riferimento Cartesiano)

$$\vec{v} \equiv (-1, 3, 0),$$

$$\vec{u} \equiv (2, 1, 1).$$

Calcolare, inoltre, i moduli di $\vec{v} + \vec{u}$ e di $\vec{v} - \vec{u}$, il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{u}$, ed il modulo del prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{u}$.

Esercizio 8): Calcolare il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{u}$, se $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{u}| = 3$, e l'angolo θ che i due vettori formano tra loro vale $\theta = \pi/3$.

Esercizio 9): Le componenti Cartesiane della somma e della differenza tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sono, rispettivamente:

$$\vec{v} + \vec{u} \equiv (1, -2, 5),$$

$$\vec{v} - \vec{u} \equiv (-3, 4, 1).$$

Calcolare le componenti Cartesiane di $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

Esercizio 10): Il vettore $\vec{v}$ ha componenti

$$\vec{v} \equiv (1, 2, 2),$$

mentre le prime due componenti del vettore $\vec{u}$ valgono 2 e 1, rispettivamente. Calcolare quanto deve valere la terza componente di $\vec{u}$ affinchè $\vec{v}$ e $\vec{u}$ siano tra loro perpendicolari.

Esercizio 11): Il prodotto scalare tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$, i cui moduli sono $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{u}| = 2$, vale -3. Calcolare l'angolo tra i due vettori.