- LEZIONE 6 (Inf. Applicata) DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA - A.A. 2006/2007

Silvio De Siena

1 Lavoro ed Energia

1.1 Conservazione dell'energia meccanica

Uno dei principi della natura è quello di conservazione dell'energia; si sa infatti, genericamente che "l'energia si conserva". Tuttavia, per poter dare significato fisico a questa affermazione è prima di tutto necessario definire l'energia o, meglio ancora, le varie forme di energia possedute da un sistema. Nel caso di un punto materiale soggetto alle leggi della Meccanica (parleremo quindi di *energia meccanica*) possiamo definire due forme di energia: *energia cinetica* ed *energia potenziale*. Vedremo che il principio di conservazione dell'energia ci dirà che queste due forme di energia si trasformano l'una nell'altra lasciando invariato il bilancio totale.

Energia cinetica

L'energia cinetica è associata al moto di un corpo. Se il punto materiale ha massa m e velocità di modulo v, l'energia cinetica, che indicheremo con K è definita da

$$K \doteq \frac{1}{2}\, m\, v^2. \tag{1}$$

Vediamo quindi che questa forma di energia cresce col quadrato della velocità, e che è una quantità scalare, non vettoriale. Non dipende, infatti dalla direzione e dal verso della velocità ma solo dal suo modulo.

Vediamo quali sono le dimensioni fisiche dell'energia:

$$[K] = [m \cdot v^2] = [m \cdot l^2 \cdot t^{-2}]. \tag{2}$$

Nel sistema MKS abbiamo quindi che K si misura in $Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$. In realtà quando fra poco introdurremo il lavoro vedremo che per l'energia si preferisce definire un'unità specifica.

Lavoro meccanico

Ricordiamo ora che ogni moto, e quindi la possibilità per ogni corpo di acquistare una velocità, è dovuto all'azione di una qualche forza. Allora, deve essere possibile associare una qualche forma di energia all'azione di una forza. Definiamo quindi il *lavoro meccanico* (che d'ora in poi chiameremo semplicemento lavoro) svolto da una forza. Dal punto di vista dell'esperienza comune, noi siamo abituati ad associare il concetto di lavoro al concetto di "fatica"; in questo senso, trascinare un grosso pacco significa compiere un "lavoro", e tanto più grande è il tratto lungo il quale lo trasciniamo, tanto più grande è la "fatica", e quindi il lavoro. Di conseguenza, capiamo che nella definizione di lavoro oltre alla forza deve entrare anche lo spostamento. Nel definire l lavoro procederemo per gradi, partendo dal caso più semplice fino ad arrivare al caso più generale.

a) Caso di forza costante e spostamento rettilineo parallelo alla forza.

In prima approssimazione, ci limiteremo a definire il lavoro nel caso semplice di una forza costante $vecF$ che trascina un corpo parallelemente alla propria direzione (per esempio, un pacco da noi trascinato lungo un pavimento). Se la forza trascina il corpo da un punto A ad un punto B, la distanza $\overline{AB}$, che indicheremo con s, la definiamo come "spostamento". Definiamo allora "lavoro compiuto dalla forza $vecF$".per spostare il corpo dal punto A al punto B come il prodotto della intensità F della forza per lo spostamento s da A a B

$$L_{AB} \doteq F\ s. \tag{3}$$

È da sottolineare però che in F dobbiamo inglobare un segno relativo rispetto allo spostamento. Supponiamo infatti che la forza abbia il verso che va da A a B; allora, essa è concorde con lo spostamento, ambedue avranno segno positivo, ed il loro prodotto, cioè il lavoro, sarà positivo (si pensi ad un uomo che cerca di far muovere un carretto). Supponiamo invece che la forza abbia il verso che va da B ad A; allora, essa ha verso opposto rispetto allo spostamento, e le attribuiamo segno negativo, lasciando il segno positivo allo spostamento; il loro prodotto, cioè il lavoro, sarà allora negativo. Questo secondo caso lo abbiamo per esempio se il corpo si sta muovendo da A a B, e la forza si oppone a questo movimento (si pensi per esempio ad un uomo posto sulla cima di una discesa che cerca di fermare con una corda un carretto che sta scendendo lungo la discesa).

Prima di proseguire, analizziamo le dimensioni del lavoro, e facciamo vedere che queste sono le stesse dimensioni dell'energia cinetica:

$$[L_{AB}] = [F \cdot l] = [m \cdot l \cdot t^{-2} \cdot l] = [m \cdot l^2 \cdot t^{-2}]. \tag{4}$$

Ne concludiamo che l'energia cinetica ed il lavoro sono due forme di energia, e si misurano quindi con la stessa unità di misura. Definiamo allora l'unità di misura del lavoro (e, quindi, dell'energia) nel sistema MKS come il *Joule* (simbolo J) definito nel modo seguente: *Un Joule è il lavoro compiuto da una forza di* 1 *Newton per causare al corpo lo spostamento di* 1 *metro* (cioè, $1\ J = 1\ N \cdot 1\ m$).

Naturalmente, qualsiasi forma di eergia può essere misurata nel sistema MKS in Joule, ed è quello che faremo da ora in poi.

Esercizio 1): Un punto materiale, sottoposto ad una forza costante di modulo $F = 3\ N$, si sposta di un tratto $s = 2\ m$ tra i punti A e B nella stessa direzione e nello stesso verso della forza. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza sul punto materiale.
Soluzione: Forza e spostamento sono di verso concorde, quindi il lavoro ha segno positivo e vale

$$L_{AB} \equiv F\ s = 3 \cdot 2\ J = 6\ J.$$

Esercizio 2): Un punto materiale, sottoposto ad una forza costante di modulo $F = 4\ N$, si sposta di un tratto $s = 5\ m$ tra i punti A e B nella stessa direzione ma in verso opposto a quello della forza. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza sul punto materiale.
Soluzione: Forza e spostamento sono di verso discorde, quindi il lavoro ha segno negativo e vale

$$L_{AB} \equiv -F\ s = -4 \cdot 5\ J = -20\ J.$$

b) Caso di forza costante e spostamento rettilineo, ma non parallelo alla forza.

Prima di procedere, generalizziamo leggermente la definizione di lavoro (3) che, in effetti, si riferisce ad un caso molto particolare. Definiamo infatti $\vec{s}$ (il *vettore spostamento*) come quel vettore che, dati i punti A e B trai quali lo spostamento avviene, ha come modulo la distanza tra A e B, come direzione la retta che contiene A e B, e come verso quello che va da A a B. Se $\vec{F}$ è il vettore forza, la definizione (3) si riferisce al caso in cui la forza è costante, ed i due vettori $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ hanno la stessa direzione. In pratica, $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ possono essere o paralleli e concordi (stesso verso, lavoro positivo) o paralleli e discordi (verso opposto, lavoro negativo).

Consideriamo ora il caso che la forza sia ancora costante, e lo spostamento sia ancora rettilineo, ma supponiamo che il vettore forza F e quello spostamento s non abbiano più la stessa direzione, ma formino tra loro un angolo *theta*. Si immagini per esempio che stiamo trascinando un pacco sul pavimento tirando una corda attaccata al pacco, ma non teniamo la corda parallela al pavimento; poichè la forza che esercitiamo ha la direzione della corda, e lo spostamento è parallelo al pavimento, abbiamo un caso nel quale forza e spostamento non sono paralleli. Si capisce subito, in questo caso, che la parte della forza che può spostare il corpo lungo la direzione dello spostamento è solo la componente della forza lungo la direzione dello spostamento. Possiamo cioè scomporre la forza in una componente parallela allo spostamento, che è quella che fa il lavoro, ed in una componente perpendicolare allo spostamento, che non può contribuire a muovere il corpo nella direzione voluta. Quindi, generalizziamo la definizione di lavoro a questo caso dicendo che *il lavoro di una forza costante $\vec{F}$ per realizzare uno spostamento rettilineo $\vec{s}$ tra un punto A ed un punto B è dato dal prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento, per il modulo dello spostamento.* Essendo *theta* l'angolo tra la forza e la direzione dello spostamento, abbiamo che la componente della forza lungo questa direzione è, come sappiamo, $|\vec{F}|$ cos *theta*; allora, se s indica il modulo dello spostamento, abbiamo

$$L_{AB} \doteq (|\vec{F}| \ \cos\ \theta)\ s, \tag{5}$$

espressione che, se si ricorda la definizione di prodotto scalare tra due vettori, si può riscrivere come

$$L_{AB} \doteq \vec{F} \cdot \vec{s}, \tag{6}$$

dove "$\cdot$" indica (vedi le prime lezioni) proprio il prodotto scalare tra i due vettori. Si noti che, nel caso particolare nel quale $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ hanno la stessa direzione, l'angolo θ varrà 0 se i vettori hanno verso concorde, mentre varrà π se i vettori hanno verso discorde; poichè $\cos\ 0 = 1$ e $\cos\ \pi = -\ 1$, vediamo che $|\vec{F}|\ \cos\ 0 = |\vec{F}|$, mentre $|\vec{F}|\ \cos\ \pi = -\ |\vec{F}|$, ed allora nel primo caso (verso concorde) abbiamo lavoro positivo, e nel secondo caso (verso discorde) abbiamo lavoro negativo. Quindi, quello che abbiamo indicato con F nella relazione (3) (la componente della forza) non è altro che $|\vec{F}|\ \cos\ 0$ nel primo caso, e $|\vec{F}|\ \cos\ \pi$ nel secondo caso.

Infine, ricordiamo una cosa importante; cioè che il prodotto scalare $\vec{F} \cdot \vec{s}$ può essere interpretato sia come il prodotto della componente di $\vec{F}$ lungo $\vec{s}$ moltiplicata per il modulo di $\vec{s}$, *sia come il prodotto della componente di* $\vec{s}$ *lungo* $\vec{F}$ *moltiplicata per il modulo di* $\vec{F}$. Quindi, possiamo anche affermare che *nel lavoro conta solo la componente dello spostamento lungo la direzione della forza*. Sfrutteremo questo fatto nel seguito.

Esercizio 3): Un punto materiale, sottoposto ad una forza costante di modulo $F = 5\ N$, si sposta di un tratto tra i punti A e B, distanti tra loro 3 m. Il vettore spostamento $\vec{s}$ forma con la forza $\vec{F}$ un angolo $\theta = 60°$. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza sul punto materiale.
Soluzione: Le relazioni (5), (6) ci danno

$$L_{AB} \equiv \vec{F} \cdot \vec{s} \equiv (|\vec{F}|\ \cos\ \theta)\ s$$

$$= (5 \cdot \cos\ 60°) \cdot 3\ J = (5 \cdot \frac{1}{2}) \cdot 3\ J = 7.5\ J.$$

Esercizio 4): Un punto materiale, sottoposto ad una forza costante di modulo $F = 4\ N$, si sposta di un tratto tra i punti A e B, distanti tra loro 6 m. Il vettore spostamento $\vec{s}$ forma con la forza $\vec{F}$ un angolo $\theta = 135°$. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza sul punto materiale.
Soluzione: Le relazioni (5), (6) ci danno

$$L_{AB} \equiv \vec{F} \cdot \vec{s} \equiv (|\vec{F}|\ \cos\ \theta)\ s$$

$$= (4 \cdot \cos\ 135°) \cdot 6\ J = (4 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})) \cdot 6\ J = -12\ \sqrt{2}\ J \approx -16.92\ J.$$

c) Caso generale.

Adesso usiamo la definizione b) per generalizzare il concetto di lavoro al caso più generale: forza variabile e spostamento di forma qualsiasi.

Consideriamo infatti una forza $\vec{F}$ che può dipendere dal punto (per esempio, si pensi alla forza di richiamo elastica oppure alla forza di attrazione gravitazionale). Si consideri poi il caso in cui il punto materiale si sposti da un punto A ad un punto B seguendo un percorso di forma qualsiasi tra i due punti: per esempio, muovendosi lungo un semicerchio che ha $\overline{AB}$ come diametro, oppure lungo una qualsiasi linea comunque tortuosa che unisca A con B. Come calcoliamo il lavoro fatto dalla forza in questo caso?

A questo scopo, dividiamo la linea che unisce A con B in N tratti, e indichiamo con Δs_i ($i = 1, ..., N$) il tratto i-esimo a partire da A. Facciamo in modo che i tratti siano di lunghezza così piccola da poterli considerare praticamente rettilinei, e contemporaneamente da poter considerare costante la forza su tutti i punti di un certo tratto; questo vuol dire che il valore della forza (nel senso di modulo, direzione e verso) è praticamente lo stesso in qualsiasi punto di un tratto fissato, e che il suo valore cambia solo spostandosi su un altro tratto. Indichiamo con $\vec{F}_i$ il valore della forza sui punti del tratto Δs_i. Si noti che, quando la lunghezza dei tratti Δs_i diventa veramente molto piccola, praticamente la direzione di questi tratti diventa tangente alla curva che descrive lo spostamento da A a B. Definiamo ora il vettore $\Delta\vec{s}_i$ (lo *spostamento elementare i-esimo*) come quel vettore che ha come modulo la lunghezza del tratto Δs_i, come direzione quella dello stesso tratto, e come verso quello che va da A a B. Poichè abbiamo detto che scegliamo il tratto Δs_i così piccolo da poterlo considerare rettilineo, e da poter considerare costante il valore $\vec{F}_i$ su di esso, vediamo che su un singolo tratto ricadiamo nel caso b), e possiamo quindi calcolare il *lavoro elementare* ΔL_i fatto dalla forza lungo lo spostamento elementare $\Delta\vec{s}_i$ attraverso la relazione (6):

$$\Delta L_i \doteq \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i. \tag{7}$$

Questo rappresenta il lavoro elementare fatto dalla forza lungo lo spostamento elementare i-esimo; per ottenere il lavoro totale fatto dalla forza lungo tutta la linea che rappresenta lo spostamento tra A e B basterà sommare tutti lavori elementari fatti dalla forza sugli N tratti in cui abbiamo diviso tale linea:

$$L_{AB} \doteq \sum_{i=1}^{N} \Delta L_i. = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i. \tag{8}$$

Dal punto di vista matematico, quando tutti tratti Δs_i "tendono a zero", la quantità definita nell'Eq. (8) si definisce "integrale di linea da A a B", e si indica con il simbolo $\int_{AB,L} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove con L abbiamo indicato la linea prescelta; dal punto di vista pratico, la somma dell'Eq. (8) approssima il valore dell'integrale entro qualsiasi errore prefissato purchè si scelga il numero N di tratti abbastanza grande, e la loro lunghezza abbastanza piccola.

Non insisteremo molto su questo caso generale, ma presentiamo un esempio abbastanza semplice nel quale possiamo calcolare esplicitamente il lavoro in base alla definizione (8).

Esercizio 5): Un punto materiale si sposta da A a B lungo un semicerchio di raggio $Requiv\overline{AB}/2 = 2\ m$, sotto l'azione di una forza di modulo costante pari a $4\ N$, ma di direzione che varia su ogni punto del semicerchio rimanendo tangente al semicerchio stesso, e di verso concorde a quello che va da A a B. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza sul punto materiale.

Soluzione: Dividiamo il semicerchio negli spostamenti elementari $\Delta\vec{s}_i$. Ogni spostamento elementare, come abbiamo detto, è di fatto tangente alla linea tra A e B, cioè, in questo caso, tangente al semicerchio, concorde con il verso che va da A a B. Essendo la forza sempre tangente al semicerchio, il suo valore $\vec{F}_i$ su $\Delta\vec{s}_i$ è quindi tangente a $\Delta\vec{s}_i$ e concorde con il suo verso; questo significa che l'angolo tra $\vec{F}_i$ e $\Delta\vec{s}_i$ è nullo, e allora il lavoro elementare vale

$$\Delta L_i = (|\vec{F}_i| \cdot \cos\ 0°) \cdot |\Delta\vec{s}_i| = 4 \cdot |\Delta\vec{s}_i|.$$

La relazione (8) dà quindi

$$L_{AB} = \sum_{i=1}^{N} 4 \cdot |\Delta\vec{s}_i| = 4 \cdot \sum_{i=1}^{N} |\Delta\vec{s}_i| = 4 \cdot (\pi\ R) = 4 \cdot (2\ \pi) = 8\ \pi\ J,$$

dove abbiamo usato il fatto che la somma delle lunghezze di tutti i trattini Δs_i dà ovviamente la lunghezza totale della linea (in questo caso, la lunghezza del semicerchio).

Energia potenziale

Il concetto di lavoro, ed il fatto che bisogna compiere lavoro per generare moto (cioè energia cinetica) ci porta a definire, nel caso dei *sistemi conservativi*, il concetto di *energia potenziale*. Preliminarmente, è necessario definire il concetto di sistema conservativo, anzi, per meglio dire, il concetto di *forza conservativa*: *una forza si definisce conservativa se il lavoro che questa forza esegue per spostare un corpo da un punto A ad un punto B non dipende dal percorso seguito per andare da A a B, ma solo dai punti A e B*. Per capirci, supponiamo di considerare un semicerchio che parta da A e arrivi a B, e poi il segmento rettilineo che congiunge A con B. Allora la definizione implica che se la forza è conservativa compie lo stesso lavoro se sposta il corpo lungo il segmento oppure se lo sposta lungo il semicerchio (o lungo qualsiasi altro percorso da A a B; l'unica cosa che conta è che lo spostamento parta da A e arrivi a B). Si noti che, ovviamente, non è questa la nostra esperienza diretta; di solito facciamo più fatica a trascinare un pacco sul contorno circolare di una piazza che a trascinarlo direttamente attraversando la piazza, perchè conta la lunghezza del percorso; il problema è che in questo caso il sistema complessivo delle forze **non è** conservativo perchè agisce ache l'attrito, da una parte, ed il nostro lavoro muscolare dall'altra.

Si capisce facilmente che una forza conservativa è molto comoda; infatti, qualsiasi sia il percorso che effettivamente fa il corpo, noi possiamo calcolare il lavoro compiuto scegliendo, fra tutti i possibili percorsi che congiungono A a B, quello per il quale il conto risulta più facile!

Ma vediamo ora le conseguenze della definizione di forza conservativa. Se il lavoro L_{AB} compiuto dalla forza dipende solo da A e da B, allora non è difficile capire che *deve essere possibile definire una funzione il cui valore dipende solo dal punto nello spazio e che deve essere connessa al lavoro*. Se indichiamo con U_A e U_B i valori che questa funzione assume, rispettivamente, nei punti A e B, allora il lavoro L_{AB} si deve poter scrivere come la differenza di questi valori:

$$L_{AB} = U_A - U_B. \tag{9}$$

È ora necessario rilevare due cose:

- Poichè la quantità fisica che possiamo misurare è il lavoro, quello che possiamo definire attraverso la (9) è la *differenza di energia potenziale*; non possiamo invece definire in assoluto l'energia potenziale in un singolo punto perchè non siamo in grado di misurarla. In altre parole, *l'energia potenziale è definita a meno di una costante arbitraria*. Infatti, se diciamo che in A l'energia potenziale vale $U_A' \doteq U_A + C$ (invece di U_A), ed in B l'energia potenziale vale $U_B' \doteq U_B + C$ (invece di U_B), dove C nei due casi è una stessa costante, vediamo che $U_A' - U_B' \equiv U_A + C - (U_B + C) = U_A + C - U_B - C = U_A - U_B$; cioè, la differenza di energia potenziale, che coincide con l'unica quantità misurabile che è il lavoro, non cambia. Allora, quello che possiamo fare è dare un valore convenzionale a questa costante, per esempio fissarla uguale a zero, e potremo parlare convenzionalmente di "valore dell'energia potenziale in un punto". In realtà, questo significa semplicemente misurare l'energia potenziale rispetto ad un riferimento convenzionale. Supponiamo infatti di scegliere arbitrariamente, ma una volta per tutte, un punto O nello spazio che prenderemo come riferimento (in modo simile a quanto facciamo scegliendo l'origine dell'asse X). Indichiamo poi con U_O il valore, anch'esso convenzionale ed arbitrario, dell'energia potenziale nel punto O. Allora, possiamo definire l'energia potenziale in qualsiasi altro punto dello spazio (A, B, ...) *come la differenza di energia potenziale tra il punto scelto ed il punto di riferimento O*; cioè, $U_A \equiv U_A - U_O$, $U_B \equiv U_B - U_O$, ecc. Allora, abbiamo che $U_A - U_B = U_A - U_O - (U_B - U_O)$. In pratica, la costante C arbitraria di cui parlavamo prima corrisponde a $C = -U_O$, e, come questa costante, possiamo fissare arbitrariamente $U_O = 0$. Questo è quello che faremo nelle applicazioni.

- Poichè abbiamo dato la definizione (9) di energia potenziale, e poichè in realtà la variazione di energia potenziale tra A e B, che indichiamo con ΔU_{AB}, come di norma, è definita come la differenza tra il punto *finale* B ed il punto *iniziale* A

$$\Delta U_{AB} \doteq U_B - U_A,$$

ne concludiamo che *la variazione di energia potenziale tra due punti è uguale al lavoro compiuto tra i due punti cambiato di segno*:

$$\Delta U_{AB} \doteq -\, L_{AB}. \tag{10}$$

È questa di solito la definizione che viene data di energia potenziale.

Principio di conservazione dell'energia meccanica

Possiamo ora enunciare il *principio di conservazione dell'energia meccanica*: *In un sistema di forze conservativo l'energia meccanica totale di un* *corpo, definita come la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica del corpo, rimane costante.*

Vediamo di capire ora come possiamo esprimere in formula questo principio. Partiamo dalle definizioni delle due forme di energia (cinetica e potenziale) che abbiamo dato. Sappiamo che l'energia potenziale dipende dal punto dello spazio; ma anche l'energia cinetica dipende dal punto nello spazio. Infatti, dato un certo moto, la velocità del corpo, e quindi la sua energia cinetica, dipende dal punto nel quale la misuriamo. Allora, indichiamo con $v_A, v_B, K_A, K_B, U_A, U_B$, rispettivamente, le velocità, le energie cinetiche, e le energie potenziali possedute in due *qualsiasi* punti A e B dal nostro corpo. Naturalmente

$$K_A = \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 \ \ ; \ \ K_B = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2.$$

Il principio di conservazione dell'energia meccanica ci dice semplicemente che la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica di un corpo *non dipende dal punto*; cioè

$$U_A + K_A = U_B + K_B, \tag{11}$$

o, con la forma esplicita delle energie cinetiche,

$$U_A + \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 = U_B + \frac{1}{2}\, m\, v_B^2. \tag{12}$$

Se definiamo l'*energia totale* E come

$$E \doteq U + K \equiv U + \frac{1}{2}\, m\, v^2, \tag{13}$$

dove le energie potenziale e cinetica sono riferite ad un qualsiasi punto dello spazio, il principio di conservazione (12) lo possiamo simbolicamente scrivere come

$$E = cost. \tag{14}$$

Prima di proseguire, si noti che la relazione (12), portando a primo membro tutte le energie potenziali e a secondo membro tutte quelle cinetiche, si può riscrivere come

$$U_A - U_B = +\frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2, \tag{15}$$

cioè

$$- \Delta U_{AB} \equiv L_{AB} = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2; \tag{16}$$

questa, con al primo membro il lavoro, sarà la forma più comoda per le applicazioni.

Un importante esempio di forza conservativa: la forza peso

Un importante esempio di forza conservativa è la forza peso $F_p = m\ g$. Applichiamo ora a questa forza i concetti esposti precedentemente. Innanzitutto, cominciamo con il considerare un corpo di massa m che cade lungo la verticale sotto l'azione di questa forza. Poichè in questo caso lo spostamento è rettilineo, con verso dall'alto verso il basso, e la forza è costante ed ha la stessa direzione e lo stesso verso, ricadiamo nel caso più semplice, e possiamo calcolare il lavoro della forza tramite la (3); inoltre, questo lavoro avrà segno positivo perchè forza e spostamento hanno verso concorde. Se A è il punto di partenza del corpo a quota più alta, e B è il punto di arrivo a quota più bassa, allora lo spostamento sarà dato dalla differenza di quota tra i due punti

$$s = \Delta h.$$

Per esempio, se il corpo parte da un punto A a quota 100 m rispetto al suolo, e raggiunge cadendo B che sta a quota 50 m rispetto al suolo, allora $s \equiv \Delta h = (100 - 50)\ m = 50\ m$.

Il lavoro compiuto dalla forza peso $F_p = m\ g$ per far cadere il corpo dal punto A al punto B separati dalla differenza di quota $\Delta\ h$ sarà allora dato da

$$L_{AB} = m\ g\ \Delta h. \tag{17}$$

Naturalmente, la definizione (10) ci dice che la differenza di energia potenziale tra i due punti è data da

$$\Delta U_{AB} = -\ m\ g\ \Delta h. \tag{18}$$

Si noti che in questo caso abbiamo applicato automaticamente il principio che, potendo essere definite solo le differenze di energia potenziale, è necessario scegliere un punto di riferimento rispetto al quale calcolare tali differenze; è chiaro che in questo caso, poichè l'energia potenziale dipende solo dalla *quota*, abbiamo preso come riferimento un punto sulla superficie terrestre. Infatti, le quote le abbiamo misurate rispetto a terra. Allora, se O è il punto di riferimento sulla superficie terrestre, possiamo fissare arbitrariamente la quota h_0 di questo punto, e definire l'energia potenziale di un punto a quota h come

$$U_h = -\, m\, g\, (h\; -\; h_0). \tag{19}$$

Poichè h_0 è arbitrario, ci conviene fissarlo a zero; questo equivale a scegliere l'energia potenziale del punto di riferimento O uguale a zero : $U_0 \equiv -\, m\, g\, h_0 = 0$. Si noti anche che, poichè tutti i punti sulla superficie terrestre stanno a quota zero, tutti questi punti hanno la stessa energia potenziale di riferimento pari a zero.

Comunque, torniamo ora alla conservazione dell'energia. Se indichiamo con v_A la velocità che il corpo possiede nel punto iniziale A a quota più alta, e con v_B quella che il corpo ha acquistato nel punto B a quota più bassa, l'applicazione della forma (16) della conservazione dell'energia, con il lavoro dato in quesro caso dalla prosimo argomentoEq. (17), ci dà nel caso della caduta verticale di un corpo la relazione:

$$m\, g\, \Delta h = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2. \tag{20}$$

Questa relazione, note le due quote e la velocità iniziale, ci permette di calcolare, in modo più rapido e semplice rispetto all'applicazione del moto uniformemente accelerato, la velocità finale del corpo. Quindi, la conservazione dell'energia è uno strumento potente per risolvere problemi. Vediamo poi che nella relazione precedente la massa si elimina (come deve essere), e quindi la relazionprosimo argomentoe si riduce a

$$g\, \Delta h = \frac{1}{2}\, (v_B^2\; -\; v_A^2). \tag{21}$$

Facciamo degli esempi.

Esercizio 1): Un corpo, lasciato cadere da fermo, precipita a terra da un'altezza di 20 m. Calcolare la velocità finale.
Soluzione: Innanzitutto il corpo parte da fermo, quindi

$$v_A = 0,$$

e inoltre $\Delta h = 20\ m$.
La relazione (21) ci dà allora

$$v_b = \sqrt{2\ g\ \Delta h}\ m\ s^{-1} \approx \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20}\ m\ s^{-1} = \sqrt{400}\ m\ s^{-1} = 20\ m\ s^{-1}.$$

Si noti anche *che la relazione (21) può essere usata anche al contrario.* Possiamo cioè domandarci da quale altezza dovremmo cadere per avere lo stesso effetto di andare a sbattere contro un muro alla velocità di 20 $m\ s^{-1}$ (che corrisponde alla velocità, apparentemente ragionevole, di 72 Km/h): la risposta è, ovviamente, da 20 m (cioè da un po' più di 6 piani!).

Esercizio 2): Un corpo, avente una velocità iniziale di 10 $m\ s^{-1}$, cade da un'altezza di 33.8 m. Quale sarà la sua velocità a 10 metri dal suolo?
Soluzione: Abbiamo

$$v_A = 10\ m\ s^{-1}\ \ ;\ \ \Delta h \equiv (33.8 - 10)\ m = 23.8\ m.$$

Ricavando v_B^2 dalla (21) abbiamo

$$v_B^2 = v_A^2 + 2\ g\ \Delta h,$$

e, estraendo la radice quadrata e sostituendo i valori numerici,

$$v_B \approx \sqrt{100 + 20 \cdot 23.8}\ m\ s^{-1} = \sqrt{576}\ m\ s^{-1} = 24\ m\ s^{-1}.$$

La forza peso: il piano inclinato e gli altri percorsi non verticali

Supponiamo ora di considerare un piano inclinato di un certo angolo α, che non presenti attrito, e supponiamo di appoggiarvi un punto materiale che vi possa scivolare. È chiaro che il problema risulta di fatto bidimensionale, perchè, una volta che il corpo ha cominciato a scivolare seguirà una linea retta e non si sposterà di lato. Possiamo quindi rappresentare il piano inclinato attraverso una sezione verticale, e quindi come un triangolo rettangolo ABC, la cui ipotenusa $\overline{AC}$ rappresenta proprio il piano inclinato, il cui cateto verticale $\overline{AB}$ ha lunghezza pari alla quota, o altezza, del punto più alto A dal suolo, ed il cui cateto orizzontale $\overline{BC}$ è paralelo al terreno. L'angolo di inclinazione α del piano è l'angolo formato tra il cateto orizzontale $\overline{BC}$ e l'ipotenusa $\overline{AC}$; esso, quindi, è *adiacente* a $\overline{BC}$ e *opposto* ad $\overline{AB}$. Quindi, se indichiamo con l la lunghezza dell'ipotenusa $\overline{AC}$, cioè la *lunghezza* del piano inclinato, e con h la lunghezza del cateto verticale $\overline{AB}$, cioè l'*altezza* del piano inclinato, abbiamo

$$h = l \ \sin \ \alpha.$$

Infine, se indichiamo con b la lunghezza della base $\overline{BC}$ del piano inclinato, abbiamo

$$b = l \ \cos \ \alpha.$$

Adesso, prendiamo in considerazione il fatto che la forza che fa scivolare il corpo, e che per fare questo compie un lavoro, è la forza peso $\vec{F}_p$. Ora, questa forza ha modulo costante pari ad $m \ g$ (dove m è la massa del corpo), è verticale ed è diretta verso il basso. Lo spostamento lungo il piano inclinato $\overline{AC} \equiv \vec{l}$ (dove $\vec{l}$ è il vettore di lunghezza l diretto da A a C) è rettilineo, e forma un angolo $\pi/2 - \alpha$ con $\vec{F}_p$. Trovandoci nel caso in cui la forza è costante e lo spostamento è rettilineo, possiamo applicare la definizione (6), o l'equivalente (5), ottenendo

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \vec{F}_p \cdot \vec{l} = \left[m \ g \ \cos \ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \ l \\ &\equiv m \ g \ \left[l \ \cos \ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = m \ g \ [l \ \sin \ \alpha] \equiv m \ g \ h. \end{aligned} \tag{22}$$

Vediamo quindi che il lavoro che la forza peso compie per trascinare lungo il piano inclinato $\overline{AC}$ il corpo è lo stesso che compierebbe se il corpo fosse lasciato cadere lungo la verticale $\overline{AB}$. Quello che viene messo in evidenza è che nel lavoro conta solo la componente dello spostamento lungo la direzione della forza, come abbiamo visto in precedenza.

Prima di passare alle applicazioni, facciamo un'altra considerazione.

Innanzitutto, vediamo subito che il lavoro che la forza peso può compiere lungo la direzione della base $\overline{BC}$ è zero, perchè l'angolo tra la forza peso e la base è $\pi/2$, ed il coseno di $\pi/2$ (che entra nel prodotto scalare, e quindi nel lavoro) è zero. Consideriamo allora due percorsi che portano dal punto A al punto C. Come primo percorso consideriamo quello diretto lungo l'ipotenusa, cioè lungo il piano inclinato. Come secondo percorso consideriamo quello che va da A a B (lungo il cateto verticale), e poi da B a C (lungo la base).

Abbiamo già calcolato il lavoro fatto dalla forza peso lungo il primo percorso ($\overline{AC}$), trovando che esso é uguale all'espressione (22), cioè è equivalente a quello che la forza peso farebbe lungo la verticale $\overline{AB}$. Il lavoro fatto lungo il secondo percorso, cioè lungo i due cateti, è ovviamente uguale a quello fatto lungo la vertivale $\overline{AB}$, che coincide con quello fatto lungo il primo percorso $\overline{AC}$ più quello fatto lungo la base $\overline{BC}$, *che però abbiamo visto essere nullo.* Quindi: *sia il lavoro lungo* $\overline{AC}$ *che quello lungo* $\overline{AB} + \overline{BC}$ *coincidono col lavoro fatto lungo la verticale* $\overline{AB}$*, e quindi i due lavori sono uguali.* Semplicemente, la forza peso, come abbiamo detto, è conservativa ed il lavoro che compie non dipende dal percorso, ma coincide sempre con quello fatto lungo la verticale, cioè lungo la direzione della forza.

Non è difficile capire che, anche se consideriamo un percorso non rettilineo, per esempio come gli scivoli ondulati di un AcquaPark, se dividiamo il percorso in tanti trattini abbastanza piccoli da poter essere considerati rettilinei, ricordiamo che l'unica parte di questi trattini che conta per il lavoro è la loro componente verticale, e poi sommiamo tutte queste piccole componenti verticali, otteniamo proprio la differenza di quota che, moltiplicata per il modulo costante della forza peso, ci dà proprio il lavoro lungo la verticale.

In conclusione, nelle applicazioni possiamo comunque usare sempre la forma (21), dove Δh denota la differenza di quota tra i due punti tra i quali avviene lo spostamento, *anche se questi due punti non sono allineati lungo la stessa verticale.*

Esercizio 3): Un punto materiale scivola senza attrito, partendo da fermo, dalla cima di un piano lungo 30 m, ed inclinato di 60 gradi. Calcolare:

- la velocità del punto quando ha percorso 20 metri lungo il piano;
- la velocità del punto alla fine del piano inclinato.

Soluzione: Abbiamo, nelle nostre notazioni,

$$l = 30\ m\ \ ;\ \ \alpha = 60^\circ\ \ ;\ \ v_A = 0.$$

- Per rispondere alla prima domanda, indichiamo con D il punto lungo il piano inclinato che dista 20 metri dalla cima (cioè dal punto A, nelle nostre notazioni); tracciamo poi a partire da D la parallela alla base del piano inclinato, ed indichiamo con E il suo punto di intersezione con la verticale $\overline{AB}$. Abbiamo ora i tre punti A, che rappresenta la quota massima, E che rappresenta la quota del punto D, e B che rappresenta il suolo. Come abbiamo visto, il lavoro della forza peso dipende solo dalle differenze di quota;

quindi, il lavoro per spostare il corpo da A a D coincide con quello necessario a farlo precipitare da A ad E; infatti, $\overline{AE}$ rappresenta proprio la differenza di quota tra A e D. Indichiamo la distanza $\overline{AE}$, cioè la differenza di quota, con $\Delta h^{'}$. Se consideriamo i due triangoli rettangoli ABC e AED, vediamo che hanno i lati paralleli; in particolare, vediamo quindi che l'angolo $\widehat{ACB}$, cioè α, coincide con l'angolo $\widehat{ADE}$, che quindi è anch'esso α. Allora, $\overline{AE}$, di lunghezza $\Delta h^{'}$, è il cateto opposto ad α, la cui ipotenusa è $\overline{AD}$, di lunghezza 20 m; quindi

$$\Delta h^{'} = \overline{AD} \cdot \sin\ \alpha = 20 \cdot \sin\ 60^{\circ}\ m = 10\ m.$$

A questo punto possiamo applicare la relazione (21), sostituendo Δh con $\Delta h^{'} = 10\ m$, v_B con $v_E \equiv v_D$, e ricordando che $v_A = 0$:

$$g\ \Delta h^{'} = \frac{1}{2}\ v_E^2 \equiv \frac{1}{2}\ v_D^2,$$

cioè

$$100 = \frac{1}{2}\ v_D^2\ m^2\ s^{-2},$$

da cui

$$v_D = \sqrt{200}\ m\ s^{-1} \approx 14.14\ m\ s^{-1}.$$

- Per rispondere alla seconda domanda basta calcolare la differenza di quota $\overline{AB}$, cioè l'altezza h che è data, come sappiamo, da

$$h = l\ \sin\alpha = 15\ m.$$

Applicando la (21) con $\Delta h = 15\ m$ e $v_A = 0$, abbiamo

$$15\ g \equiv 150\ m^2\ s^{-2} = \frac{1}{2}\ v_B^2\ m^2\ s^{-2},$$

da cui

$$v_B = \sqrt{300}\ m\ s^{-1} \approx 17.32\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 4): Un primo corpo cade liberamente, partendo da fermo, da un'altezza di 20 metri. Quanto deve essere l'inclinazione minima di un piano

inclinato di lunghezza $l = 40\ m$ affinché un secondo corpo che vi scivola senza attrito e partendo da fermo acquisti una velocità superiore al primo?
Soluzione: Anche se non è necessario per la soluzione del problema, calcoliamo la velocità del primo corpo; considerando che la velocità iniziale è zero, abbiamo

$$20\ g \equiv 200 = \frac{1}{2}\ v_f^2,$$

dove v_f denota la velocità finale. Quindi

$$v_f = \sqrt{400}\ m\ s^{-1} = 20\ m\ s^{-1}.$$

Ora, risolviamo il problema. Denotato con α l'angolo di inclinazione del piano, abbiamo che l'altezza del piano è

$$h = l\ \sin\ \alpha = 40\ \sin\ \alpha\ m.$$

Poichè ambedue i corpi partono da fermo, e le velocità finali dipendono quindi solo dalle quote, basterà imporre che h sia maggiore della quota dalla quale precipita il primo corpo, cioè 10 metri:

$$h > 20\ m;$$

inserendo l'espressione di h abbiamo

$$40\ \sin\ \alpha > 20\ m,$$

cioè

$$\sin\ \alpha > \frac{20}{40} \equiv \frac{1}{2},$$

e quindi

$$\alpha > 60°.$$

Esercizio 4): Un punto materiale scivola senza attrito all'interno di una conca semicircolare di raggio pari a 45 metri. Il corpo parte da fermo dal bordo della conca. Calcolare la velocità che il corpo ha acquistato sul fondo della conca, e l'altezza alla quale risalirà dall'altra parte.

Soluzione: Abbiamo detto che, qualsiasi sia il percorso, conta solo la differenza di quota. Se il corpo parte dal bordo della conca si trova chiaramente a quota pari al raggio rispetto al suolo, cioè a quota $\Delta h = 45\ m$. Chiamo O il punto al fondo della conca. Quello che dobbiamo calcolare è v_O. Poichè il corpo parte da fermo, se A è il punto sul bordo della conca, possiamo usare la relazione (21) con $v_A = 0$, v_B sostituita da v_O, e $\Delta h = 45\ m$, ottenendo

$$45\ g \equiv 450\ m^2\ s^{-2} = \frac{1}{2}\ v_O^2\ m^2\ s^{-2},$$

da cui

$$v_O = \sqrt{900}\ m\ s^{-1} = 30\ m\ s^{-1}.$$

Per quanto riguarda la seconda domanda, è ovvio che la conservazione dell'energia ci dice che il corpo risale esattamente alla stessa altezza di prima, cioè $\Delta h = 45\ m$. Insomma, il corpo parte dal bordo della conca e, quando arriva al fondo, ha trasformato tutta l'energia potenziale in energia cinetica; quest'ultima poi fa in modo che il corpo risalga alla stessa quota dall'altra parte della conca, in modo che tutta l'energia cinetica sia ri-trasformata in energia potenziale, e così via indefinitamente; il corpo, cioè, continua ad oscillare nella conca, in assenza di attrito, passando da un punto sul bordo all'altro punto sul bordo che è opposto al primo ecc.