- LEZIONE 9 DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA - A.A. 2006/2007

Silvio De Siena

1 Alcuni elementi di Elettromagnetismo (parte I)

1.1 Fenomenologia

Elettrizzazione per strofinio e cariche elettriche

Per poter introdurre un nuovo settore della Fisica è necessario partire dai fenomeni che si vogliono descrivere.

Sin dall'antichità alcuni di questi fenomeni erano già noti. Per esempio, è noto che, strofinando con un panno di lana alcuni materiali, questi acquistano la proprietà di attrarne altri. Ogni studente ha strofinato una penna a sfera sul proprio maglione, e ha verificato che dopo questa operazione la penna è in grado di attrarre un pezzo di carta. Approfondendo l'osservazione, ci accorgiamo che se strofiniamo con due panni di lana due oggetti fatti dello stesso materiale questi si respingono. Se strofiniamo con due panni di lana due oggetti fatti di materiali diversi, questi, a seconda dei materiali scelti, si possono attrarre oppure respingere.

A questo punto, possiamo cominciare ad arrivare a qualche prima conclusione. Diciamo che lo strofinio causa un'*elettrizzazione* dei materiali strofinati, e che questa elettrizzazione può essere di due tipi che distingueremo con i termini *positivo e negativo*. Se chiamiamo *carica elettrica* la quantità fisica (che poi dovremo opportunamente definire) che causa l'elettrizzazione, diremo che un corpo può acquistare una *carica positiva* oppure una *carica negativa*. In base alle osservazioni fatte prima, possiamo anche concludere che *cariche dello stesso segno si respingono*; infatti, abbiamo visto che due oggetti dello stesso materiale caricati per strofinio, che quindi ovviamente devono avere lo stesso segno di carica, si respingono. Deduciamo poi, invece, che *cariche di segno opposto si attraggono.*

Materiali isolanti e materiali conduttori

Altri fenomeni che possiamo osservare riguardano le caratteristiche dei materiali che vengono elettrizzati. Infatti, notiamo che in alcuni casi, una volta elettrizzato il corpo per strofinio, se questo corpo viene collegato in qualche modo a terra, perde l'elettrizzazione; mentre questo non accade per corpi costituiti da altri materiali. Interpretiamo questo fatto stabilendo che ci sono alcuni materiali, che definiamo *conduttori*, i quali permettono che le cariche al loro interno si muovano, e questo spiega la perdita di elettrizzazione per contatto attraverso il fatto che le cariche si trasferiscono dal corpo a terra (o anche su un altro corpo). Esempi di conduttori sono i metalli. Esistono invece altri materiali che (entro certi limiti) non permettono il moto delle cariche, e che prendono i nome di *isolanti o dielettrici.* Esempi di materiali isolanti sono il vetro e la gomma.

1.2 Elementi di Elettrostatica

L'elettrostatica è quella branca dell'Elettromagnetismo che studia la Fisica delle *cariche in equilibrio* e quindi *in quiete*. In questa prima parte, quindi, pur introducento quantità e concetti fisici che si utilizzano per situazioni generali, considereremo il caso in cui le cari che sono ferme.

Definizione quantitativa della carica elettrica attraverso misura

Abbiamo già visto che una grandezza fisica è completamente definita solo se si è in grado di effettuarne una misura quantitativa. Nel caso della carica elettrica, gli strumenti che effettuano la misura prendono il nome di *elettroscopi*. Illustriamone qui uno specifico che prende il nome di *elettroscopio a foglie*. Prima di procedere, comunque, è bene precisare che un tale strumento non è in grado di misurare una carica con grande precisione (le misure precise di carica in effetti sfruttano fenomeni dinamici). Tuttavia, dal punto di vista concettuale è sufficiente che "in principio" esista uno strumento che sia in grado di assegnare un valore numerico alla grandezza fisica.

Un elettroscopio a foglie è costituito da una sferetta conduttrice, alla cui parte inferiore è attaccata una sbarretta anchèssa conduttrice, alla cui parte finale sono attaccate due sottili sfoglie di materiale conduttore (tipicamente, oro).

la sbarretta conduttrice mette in comunicazione la sferetta con le sfoglie; queste ultime sono inserite in un'ampolla di vetro, il cui scopo è di proteggerle da disturbi meccanici esterni (come colpi di vento), e la sbarretta conduttrice alla quale sono attaccate fuoriesce in parte dall'ampolla, passando attraverso un tappo isolante, connettendosi alla sferetta conduttrice che si trova completamente all'esterno dell'ampolla. Riassumendo, abbiamo una sferetta conduttrice, attaccata nella parte inferiore ad una sbarretta conduttrice, che penetra poi attraverso un tappo isolante in un'ampolla di vetro, ed alla quale sono appese, completamente all'interno dell'ampolla, due sottilissime sfoglie conduttrici.

Inizialmente, le sfoglie sono disposte verticalmente, a causa della gravità, e sostanzialmente sono sovrapposte, formando un angolo nullo tra loro. Se si avvicina il corpo che contiene la carica da misurare alla sferetta esterna dell'elettroscopio, questa carica si trasferisce su questa sferetta; essendo il complesso sferetta + sbarretta + sfoglie tutto conduttore, la carica si trasferisce fino alle sfoglie, e rimane poi su di esse perchè non può muoversi verso l'esterno dove c'è il vuoto (o, equivalentemente, l'aria) che è isolante. Le sferette si caricano quindi entrambe con carica dello stesso segno; quindi si respingono, e formano un angolo che dipende dall'equilibrio tra la forza peso e la forza repulsiva tra le cariche. Ovviamente, più grande è la carica trasferita, più grande è l'angolo. È naturale quindi misurare la carica attraverso la misura dell'angolo che genera tra le sfogliette; stabilito arbitrariamente un angolo che descrive l'unità di misura della carica, tutte le cariche possono essere misurate in questa unità.

Il concetto di carica puntiforme

Nella sezione di Meccanica abbiamo usato il concetto di punto materiale, precisandone il significato. Nel caso dell'elettrostatica viene introdotto un concetto simile : quello di *carica puntiforme*. La carica puntiforme di norma è una carica concentrta su un oggetto di dimensioi trascurabili rispetto a quelle sulle quali vengono effettuate le osservazioni; tuttavia, nel caso della carica puntiforme è necessario qualche ulteriore requisito, legato al concetto di *simmetria*. Il concetto di simmetria riveste una fondamentale importanza in tutte le branche della fisica. Cerchiamo di capire in particolare quale simmetria interviene nel caso della carica puntiforme. Se una carica è concentrta in un punto, allora interviene la cosiddetta *simmetria sferica*; capiamo questo concetto introducendo un *osservatore virtuale*, il quale può osservare il sistema da un qualsisi punto dello spazio. Adesso, consideriamo, tra tutti i punti dello spazio, quelli che si trovano d una certa distanza fissata dal punto sul quale è concentrata la carica; ovviamente, questi punti formano una *sfera*, di raggio pari alla distanza che abbiamo fissato. Supponiamo di mettere l'osservatore in uno dei punti della sfera e di fargli osservare il sistema e lo spazio circostante; poi lo addormentiamo, in modo che non sia cosciente, e lo spostiamo su un altro punto della sfera. È evidente che, quando si sveglia non sarà in grado di capire se si trova nel vecchio punto o in un altro, perchè l'unico riferimento che ha è la distanza dalla carica che è rimasta la stessa. In conclusione, tutti i punti di una sfera che hanno come centro la carica puntiforme sono equivalenti tra loro per un osservatore (simmetria sferica) *e quindi dovranno essere equivalenti anche dal punto di vista delle grandezze fisiche* (come vedremo). Questo ragionamento ci dice che, per realizzare una carica puntiforme è importante anche *la forma del corpo di supporto*. È chiaro allora che i corpi carichi che più si avvicinano alla carica puntiforme sono i corpi di forma *sferica*, caricati uniformemente, perchè conservano ovviamente la simmetria sferica. Di fatto, vedremo che qualsiasi sfera carica uniformemente genera nei punti al suo esterno una situazione fisica identica a quella di una carica puntiforme.

1.3 La legge di Coulomb

Abbiamo visto che tra cariche diverse si genera attrazione o repulsione, il che significa che due cariche esercitano tra loro una *forza*. Come al solito, consideriamo due cariche puntiformi (realizzate, per esempio, attraverso due sferette cariche uniformemente, i cui raggi siano molto piccolo rispetto alla distanza tra i centri delle sferette.

La domanda ora è: qual'è la *legge* della forza che si esercita tra due cariche puntiformi poste ad una certa distanza traloro?; ina latre parole, come dipende questa forza dalle cariche, dalla loro distanza ed, eventualmente, da altri fattori?.

Introduciamo allora delle notazioni. Indichiamo con q_1 e q_2 le due cariche *nelle quali inglobiamo il segno* (cioè sia q_1 che q_2 possono essere sia numeri positivi che negativi). Indichiamo poi con r la distanza tra le due cariche.

La prima cosa da domandarsi sarà: da quali quantità ragionevolmente potrà dipendere la forza tra le due cariche? Certamente dovrà dipendere da q_1, q_2 ed r, ma, in linea di principio, potrebbe dipendere da moltissime altre cose; tuttavia, non è difficile escludere la maggior parte di cause perchè assolutamente improbabili (per esempio, difficilmente dipenderà dalla nazionalità dello sperimentatore o dal suo sesso). L'unica cosa che sembra rilevante è il *mezzo* nel quale le cariche sono immerse; ci aspettiamo infatti risultati differenti se sono nel vuoto o nell'olio.

Limitando quindi in questo modo le nostre ipotesi *a priori*, vediamo come possiamo determinare in principio la legge. Innanzitutto, dobbiamo avere un modo di *misurare* la forza tra le cariche, riconducendo la misura a metodi meccanici. Si usa in questo caso la *bilancia di torsione*. Essa è costituita nel modo seguente: ad un filo attaccato ad un supporto orizzontale (per esempio il soffitto), viene attaccata al centro di una sbarretta isolante molto leggera, ed ad uno dei capi della sbarretta viene attaccata una delle cariche, mentre all'altro capo viene attaccato un contrappeso esattamente delo stesso peso del corpo (sferetta) su cui è concentrata la carica, in modo che si facciano equilibrio, la sbarretta rimanga orizzontale, e la forza peso non agisca. In questa situazione la sbarretta rsta ferma. A questo punto, la seconda carica viene fissata su un supporto (sbaretta verticale) isolante, in modo che le due cariche sia no alla stessa quota; il supporto è movibile in modo da poter variarea a piacimento la distanza tra le cariche. Ovviamente, quando la seconda carica sul supporto viene avvicinata alla prima, tra le due cariche si esercita una forza; la carica sulla sbaretta verticale non si può muovere, ma quella attaccata ad un capo della sbarretta che a suo volta è appesa al filo comincia a ruotare a causa della forza, e torce il filo. La rotazione termina quando l'azione di rotazione della sbarretta orizzontale viene equilibrata dalla resistenza alla rotazione del filo. Poichè è possibile risalire alla forza che ha portato il filo fino a quel livello di torsione, questa forza, per condizione di equilibrio, uguaglierà la forza tra le cariche, e quindi ne fornirà una misura.

Avendo ora la possibilità di misurare la firza tra le due cariche, possiamo adottare un metodo per scpoprire la legge di questa forza. Il metodo presuppone semplicemente di mantenere, volta a volta, costanti tutti i parametri tranne uno, di far variare quest'ultimo in modo controllato, e di misurare la forza per i vari valori. uesto permette di determinare la dipendenza funzionale tra la forza ed il parametr scelto. Facendo questo per tutti i parametri, e mettendo insieme i risultati, otterremo la legge della forza.

Procediamo:

Passo 1) Fissiamo il valore del modulo di q_2 e di r (per esempio, $|q_2| = 1, r = 1$, oppure altri valori purchè non vengano cambiati in questa fase), e facciamo l'esperimento sempre nello stesso mezzo (per esempio, il vuoto o, il che è praticamente lo stesso, l'aria). Facciamo invece variare $|q_1|$; per esempio, in certe unità di misura, carichiamo la prima sferetta con carica di modulo $|q_1| = 1$, e misuriamo il corrispondente valore numerico del modulo della forza che indicheremo con F_1; poi carichiamo la prima sferetta con carica $|q_1| = 2$, e misuriamo il corrispondente valore numerico del modulo della forza che indicheremo con F_2; carichiamo la prima sferetta con carica $|q_1| = 3$, e misuriamo il corrispondente valore numerico del modulo della forza che indicheremo con F_3, e così via. Andiamo ora a calcolare i rapporti

$$F_2/F_1 \ , \ F_3/F_2 \ , \ F_3/F_1;$$

quello che troveremo (nel limite degli errori sperimentali), è che

$$F_2/F_1 = 2 \ , \ F_3/F_2 = 3/2 \ , \ F_3/F_1 = 3,$$

cioè che raddoppiando la carica si raddoppia la forza, triplicando si triplica ecc., e che quindi *il modulo della forza è direttamente proporzionale al modulo* $|q_1|$ *della prima delle due cariche.*

Se ora, invece, fissiamo il valore di $|q_1|$ e di r, facciamo l'esperimento sempre nello stesso mezzo (per esempio, il vuoto), ma facciamo invece variare $|q_2|$, otteniamo, come è prevedibile, un risultato simile: *il modulo della forza è direttamente proporzionale anche al modulo* $|q_2|$ *della seconda delle due cariche* q_2.

Se il modulo della forza deve essere direttamente proporzionale ai moduli di ciascuna carica, allora ne deduciamo che: *il modulo della forza è direttamente proporzionale al prodotto* $|q_1| \cdot |q_2|$ *delle due cariche.*

Adesso, manteniamo costanti le due cariche e rimaniamo nel vuoto, facendo variare invece la distanza r tra le due cariche: fissiamo quindi $r = 1\ m$ e misuriamo il valore $F_1^{'}$ del modulo della forza corrispondente, poi fissiamo $r = 2\ m$ e misuriamo il valore $F_2^{'}$ del modulo della forza corrispondente, e poi ancora fissiamo $r = 3\ m$ e misuriamo il valore $F_3^{'}$ del modulo della forza corrispondente, e così via. Andiamo ora a calcolare i rapporti

$$F_2^{'}/F_1^{'}\ ,\ F_3^{'}/F_2^{'}\ ,\ F_3^{'}/F_1^{'},$$

e quello che troveremo (nel limite degli errori sperimentali), è che

$$F_2^{'}/F_1^{'} = 1/4\ ,\ F_3^{'}/F_2^{'} = 4/9\ ,\ F_3^{'}/F_1^{'} = 1/9,$$

cioè che: *il modulo della forza tra due cariche è inversamente proporzionale al quadrato della distanza r tra le due cariche.*

Mettendo tutto assieme, abbiamo che: *il modulo della forza tra due cariche è direttamente proporzionale al rapporto tra il prodotto dei moduli delle cariche ed il quadrato della distanza tra le due cariche.*

In formula quindi abbiamo

$$F = K\,\frac{|q_1|\,|q_2|}{r^2}, \tag{1}$$

dove K è una costante di proporzionalità *che può dipendere solo dal mezzo nel quale sono immerse le cariche.*

Avendo determinato il modulo della forza, vediamo quali sono direzione e verso. Essendo la forza attrattiva o repulsiva, vediamo che: *la direzione della forza tra due cariche è data dalla congiungente le due cariche.*

Per poter introdurre il verso, dobbiamo specificare se stiamo osservando la forza che la *prima* carica q_1 esercita sulla *seconda* q_2, oppure se stiamo osservando la forza che la *seconda* carica q_2 esercita sulla *prima* q_1; è questione ovviamente di convenzione, ma naturalmente il risultato finale non deve cambiare. Supponiamo allora, per esempio, che stiamo osservando la forza che la *prima* carica q_1 esercita sulla *seconda* q_2; allora definiamo il vettore $\vec{r}$, che ha modulo pari alla distanza r tra le due cariche, direzione coincidente con la congiungente tra le due cariche, e *verso che va da q_1 a q_2*. Definiamo poi il vettore $\hat{r} \doteq \vec{r}/r$; $\hat{r}$ ha ovviamente direzione e verso coincidenti con quelli di $\vec{r}$ e modulo pari a 1 (infatti, $|\hat{r}| = |\vec{r}|/|r| = r/r = 1$). Diciamo che $\hat{r}$ è un *versore*, cioè un vettore di modulo unitario; esso descrive semplicemente la direzione ed il verso di $\vec{r}$. Teniamo poi conto che, come abbiamo visto, cariche di segno opposto si attraggono; questo significa che il verso della forza che q_1 esercita su q_2 deve andare da q_2 a q_1 (attrazione), e quindi deve essere *opposto* a quello del versore $\hat{r}$, cioè deve essere quello di $-\ \hat{r}$. Se le cariche sono invece dello stesso segno il verso della forza che q_1 esercita su q_2 deve andare da q_1 a q_2 (repulsione), e quindi deve essere proprio quello del versore

$\hat{r}$ Allora, il vettore che descrive la forza che la carica q_1 esercita sulla carica q_2 posta a distanza r dalla prima segue la seguente legge

$$\vec{F} = K \frac{q_1 \, q_2}{r^2} \, \hat{r}. \tag{2}$$

Questa relazione prende il nome di *Legge di Coulomb*. Si noti che in questa relazione abbiamo inserito non il modulo delle cariche, ma le cariche con i loro segni; vediamo allora che se le cariche hanno segno opposto (per esempio, $q_1 > 0$ e $q_2 < 0$, oppure $q_1 < 0$ e $q_2 > 0$) allora il prodotto ha segno negativo, e questo inverte il verso di $\hat{r}$ (cioè, dà una forza che va da q_2 a q_1) e quindi attrazione. Se invece le cariche hanno lo stesso segno (per esempio, $q_1 > 0$ e $q_2 > 0$, oppure $q_1 < 0$ e $q_2 < 0$) allora il prodotto ha segno positivo, e questo non inverte il verso di $\hat{r}$ (cioè, dà una forza che va da q_1 a q_2) e quindi repulsione. Dal punto di vista vettoriale, allora, la legge (2) dà perfettamente conto dell'esperienza. Ovviamente, essa fornisce anche il modulo giusto (Eq. (1)) perchè

$$|\vec{F}| = K \, \frac{|q_1| \, |q_2|}{r^2} \, |\hat{r}| = K \, \frac{|q_1| \, |q_2|}{r^2}.$$

Si noti che la legge di Coulomb ha una forma simile a quella di gravitazione universale.

Abbiamo visto che la costante di proporzionalità K dà conto semplicemente del mezzo nel quale sono immerse le cariche. Noi considereremo sempre come mezzo il vuoto. In realtà si preferisce ridefinire la costante K (per motivi che capiremo in parte in seguito) in termini di un'altra costante. Per il vuoto, si sceglie di scrivere

$$K = \frac{1}{4 \, \pi \, \epsilon_0},$$

dove ϵ_0 prende il nome di costante dielettrica del vuoto.

La legge di Coulomb si riscrive allora come:

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \, \pi \, \epsilon_0} \, \frac{q_1 \, q_2}{r^2} \, \hat{r}. \tag{3}$$

Importante è anche il valore numerico di ϵ_0; nel sistema MKS, nelle unità opportune, il suo valore è

$$\epsilon_0 \approx 8.859 \cdot 10^{-12}. \tag{4}$$

Si noti, allora, che $4\,\pi\,\epsilon_0 \approx 12.56 \cdot 8.859 \cdot 10^{-12} \cong 10^{-10}$, dove abbiamo preso solo l'ordine di grandezza. Allora $\frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \cong 10^{10}$, cioè la costante che compare nella forza di Coulomb ha un valore molto, molto grande. Questo è importante, perchè le sferette sulle quali sono concentrate le masse posseggono anche una massa, e quindi tra loro, oltre alla forza di Coulomb. si esercita anche l'attrazione gravitazionale con una forza il cui modulo è $F_G = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}$, dove G è la costante gravitazionale e $m_1\;m_2$ sono le masse. Ora, nel sistema MKS il valore numerico di G è, in ordine di grandezza $G \cong 10^{-10}$, quindi estremamente piccolo. Il rapporto tra la costante che compare nella legge di Coulomb e la costante gravitazionale è quindi $\cong 10^{20}$ (cento miliardi di miliardi!). É chiaro quindi che possiamo trascurare l'attrazione gravitazionale rispetto all'interazione elettrostatica.

Unità di misura della carica: il Coulomb

L'unità di misura della carica la possiamo ricavare dalla legge di Coulomb. Definiamo la carica di 1 Coulomb (che indicheremo col simbolo C) come quella carica che attira o respinge un'altra carica di 1 Coulomb posta da essa a distanza di un metro con una forza pari a $1/(4\,\pi\,\epsilon_0)\;N$. Si noti quindi che tale forza vale circa $10^{10}\;N$, cioè che 1 Coulomb è un'unità di misura spropositata! Notiamo allora che due cariche che si attirano con una forza ragionevole (da 1 a 10 N) devono valere $10^{-5} - 10^{-4}\;N$. Saranno queste quindi le cariche che prenderemo in considerazione. Il sistema di unità di misura da adottare comprenderà ora anche il Coulomb, e lo chiameremo sistema MKSQ.

1.4 Il concetto di campo elettrico e il Teorema di Gauss

Abbiamo finora seguito la strada, simile a quella della meccanica, di considerare le forze. In realtà, la descrizione dell'elettromagnetismo non può prescindere dal concetto di *campo*. Questo fatto è del tutto evidente se si considerano cariche in movimento, cioè correnti. Noi qui ci limitiamo a considerare il caso di cariche in equilibrio, cioè ferme (elettrostatica). In questo caso, comunque, la descrizione tramite il *campo elettrico*, contrapposta a quella tramite forze, presenta molti vantaggi, anche se in principio le due descrizioni (solo in questo caso!) sono equivalenti.

Per comprendere ed introdurre il concetto di campo, bisogna pensare al comportamento di un *fluido*, ed alla possibile descrizione delle sue perturbazioni. Partiamo però inizialmente dalla legge di Coulomb, e dal connesso concetto di *azione a distanza*. Cosa ci dice infatti la legge di Coulomb? Ci dice:

1) che sono necessarie *due cariche* per ottenere un effetto fisico;

2) che questo effetto fisico si esprime attraverso una forza tra le due cariche *che agisce a distanza, senza mezzo intermedio, e istantaneamente, cioè con velocità infinita di propagazione dell'interazione.*

L'esempio dei fluidi

Immaginiamo invece ora di fare un esempio (anche se improprio e da non prendere alla lettera). Supponiamo di lanciare una pallina in una vasca d'acqua; quando la pallina colpisce l'acqua, e poi prosegue al suo interno, genera una perturbazione del fluido (onde ecc.) *che ne modificano lo stato.* Si deve sottolineare che *la modifica dello stato del fluido c'è comunque anche in assenza di un'altra pallina nel fluido che venga investita dalla perturbazione.* Tuttavia, se vengono lanciate *due* palline, allora queste, aon vengono direttamente a contattnche se non vengono direttamente a contatto, interagiscono tra loro attraverso la perturbazione del mezzo (l'accqua) che ciascuna causa. Questa interazione, però *non* è a distanza (perchè avviene attraverso la mediazione del fluido (interazione di contatto), e *non* è istantanea, perchè si propaga con la velocità *finita* di propagazione delle onde del fluido.

Adesso, anche se può apparirci strano, immaginiamo che il vuoto sia un "mezzo" attraverso il quale si propaga l'interazione elettrica! Ora, l'esempio delle palline gettate nell'acqua non è il più adatto, e ricorriamo ad un'altra similitudine. Supponiamo di avere un rubinetto dal quale esce l'acqua, ed immaginiamo che ci si solo questo rubinetto che butta fuori l'acqua in un ambiente enorme, praticamente infinito. Cosa farà l'acqua? Semplicemente, uscita dal rubinetto si diramerà in tutte le direzioni "a raggiera", e si allontanerà sempre più dal rubinetto. Adesso, più fore sarà la "spinta" del rubinetto, più rapidamente uscirà l'acqua; in linguaggio usuale diciamo che il *flusso* dell'acqua sarà maggiore. Inoltre, se buttiamo un colorante nell'acqua, vedremo formarsi delle "linee" (*linee di flusso*) che segiranno la direzione della velocità dell'acqua, e che, per quanto abbiamo detto prima, si allontaneranno sempre più dal rubinetto, cioè usciranno dal rubinetto e andranno "all'infinito".

Naturalmente, se lo stesso ambiente praticamente infinito è pieno d'acqua ed è presente solo uno scarico, allora l'acqua, sempre a raggiera, partirà dallinfinito e confluirà nello scarico, e lo stesso faranno le linee di forza. Inoltre, tanto più grande sarà lo scarico, tanto più rapidamente l'accqua vi confluirà ("il flusso sarà più grande").

In ogni caso, *il rubinetto e lo scarico modificano lo stato fisico dell'ambiente circostante*. Notiamo anche che in ogni punto noi possiamo andare a misurare la velocità dell'acqua, che è un *vettore*; diciamo allora che siamo in presenza di un *campo vettoriale*, che non è altro che la velocità del fluido, il cui valore in ogni punto possiamo misurare. Il rubinetto e lo scarico le chiameremo *sorgenti del campo di velocità del fluido*. Poichè il rubinetto fornisce acqua, mentre lo scarico l'assorbe, diremo che il rubinetto è una *sorgente positiva*, mentre lo scarico è una *sorgente negativa*.

Adesso, supponiamo di avere *due sorgenti* (due rubinetti, due scarichi, o un rubinetto e uno scarico). *È chiaro che il campo di velocità in presenza delle due sorgenti non sarà uguale a quello generato da una singiola sorgente*; infatti, se per esempio abbiamo un rubinetto e uno scarico, l'accqua che , con il solo rubinetto si allargava a raggiera ed andava all'infinito, ora devierà ed in parte finirà nello scarico. In corrispondenza, anche le linee di flusso saranno modificate.. Cerchiamo di ricordare questo fatto che ci servirà in seguito.

Ritorniamo ora al "flusso" di cui parlavamo prima; esso non è altro che il flusso del campo vettoriale della velocità del fluido. Ma possiamo darne una definizione matematica quantitativa?.Intuitivamente, abbiamo bisogno di una superficie. Infatti, supponiamo di considerare una superficie S all'interno del fluido; parlando in termini semplici, il flusso dell'acqua è la quantità di acqua che attraversa questa superficie (in una certa unità di tempo). Spesso, quando si tratta di fiumi si parla anche di *portata*. Ora, capiamo subito che il flusso dipenderà da quanto è il modulo della velocità (il flusso è più grande se il modulo della velocità è più grande) ed anche, in modo cruciale, da qual'è l'angolo tra la direzione della velocità e la superficie attraverso la quale il fluido deve passare. Infatti, se al limite la velocità del fluido è *parallela* alla superficie S. il fluido non la attraverserà, ed il flusso sarà nullo. Ci aspettiamo invece che se la velocità del fluido è *perpendicolare* alla superficie S, il flusso sarà massimo. Inoltre, più grande sarà l'area di S, più grande sarà il flusso. A questo punto abbiamo capito che:

1) il flusso aumenta col modulo della velocità del fluido;

2) il flusso aumenta con l'area di S;

3) il flusso dipende dall'angolo fra la velocità e la superficie; in particolare, esso è zero quando la velocità del fluido è parallela ad S, mentre è massimo quando la velocità del fluido è perpendicolare ad S.

Da tutto questo siamo in grado di definire il flusso della velocità attraverso la superficie S. Per farlo conviene però prima definire il *versore della superficie* S che indicheremo con $\hat{n}$: *il versore $\hat{n}$ della superficie S è un vettore di modulo* 1 *perpendicolare alla superficie.* Si noti che manca per ora la definizione del verso di $\hat{n}$, ma per ora non è essenziale (possiamo scegliere uno dei due possibili); poi riprenderemo questo discorso quando faremo il teorema di Gauss.

Definito $\hat{n}$, che ricordiamo essere perpendicolare alla superficie, notiamo che quando la velocità del fluido è parallela ad S, ed il flusso è nullo, allora essa è perpendicolare a $\hat{n}$ (cioè l'angolo con $\hat{n}$ è $90°$); mentre, quando la velocità del fluido è perpendicolare ad S, ed il flusso è massimo, allora essa è parallelo a $\hat{n}$ (cioè l'angolo con $\hat{n}$ è $0°$). Questo ci suggerisce che, indicato con θ l'angolo tra la velocità $\vec{v}$ del fluido sulla superfice ed il versore $\hat{n}$, il flusso debba contenere cos θ; infatti, per $\theta = 90°$ (velocità del fluido è parallela ad S) il coseno, e quindi il flusso, è nullo; quando invece per $\theta = 0°$ il coseno è massimo ($= 1$), ed il flusso è massimo. Dovendo poi il flusso aumentare sia con l'area di S che con il modulo di $\vec{v}$, la sua espressione sarà proporzionale al loro prodotto. In definitiva, indicato con $\Phi_S(\vec{v})$ il flusso della velocità attraverso S, abbiamo

$$\Phi_S(\vec{v}) \doteq |\vec{v}|.\ S\ \cos\ \theta \equiv \vec{v} \cdot \hat{n}\ S, \tag{5}$$

dove l'ultima espressione dà il risultato giusto perchè, essendo θ l'angolo tra $\vec{v}$ ed $\hat{n}$, ed essendo $|\hat{n}| = 1$, dalla definizione di prodotto scalare abbiamo $(\vec{v} \cdot \hat{n})\ S = (|\vec{v}|.\ |\hat{n}|.\ \cos\ \theta)\ S = |\vec{v}|.\ S\ \cos\ \theta$.

Ora dobbiamo risolvere un altro piccolo problema; infatti, nella nostra definizione di flusso, per poter parlare dello stesso valore della velocità in ogni punto di S, e per poter parlare, senza ditinzione tra i punti di S, di angolo tra $\vec{v}$ e la superficie (o, equivalentemente, tra $\vec{v}$ e $\hat{n}$), abbiamo implicitamente supposto che:

1) la superficie S è piana;

2) $\vec{v}$ è costante su tutti i punti della superficie.

(Si immagini un tratto dritto di fiume senza vortici o turbolenze, quindi con linee di flusso parallele, e velocità costante, che attraversa una superficie piana).

Naturalmente, questo è un caso molto particolare. Tuttavia, non è difficile dare una definizione di flusso anche nel caso generale. Supponiamo infatti di avere una superficie S di forma qualsiasi (una semisfera, una superficie ondulata, ecc.) ed un fluido con una velocità che può variare da punto a punto della superficie. Come facciamo?

Immaginiamo allora di dividere S in tante superfici molto piccole

$$\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_N;$$

qui, per molto piccole intendiamo dire che sono così piccole che la velocità del fluido su ognuna di esse è approssimativamente costante (naturalmente, la velocità cambierà valore se consideriamo un'altra di queste superfici molto piccole. Indichiamo allora con v_1 il valore approssimativamente costante che la velocità del fluido ha sui punti di ΔS_1, con v_2 il valore approssimativamente costante che la velocità del fluido ha sui punti di ΔS_2, e così via, fino a v_N che è il valore approssimativamente costante che la velocità del fluido ha sui punti di ΔS_N. Ora, essendo ciascuna superficie molto piccola, si può anche considerare approssimativamente piana. Ricadiamo quindi, per ognuna delle piccole superfici, nel caso precedente, con superficie piana e velocità costante. Indichiamo allora con $\hat{n}_1$ il versore normale a ΔS_1, con $\hat{n}_2$ il versore normale a ΔS_2, e così via, fino a $\hat{n}_N$ che è il versore normale a ΔS_N; indichiamo anche con θ_1 l'angolo tra la velocità $\vec{v}_1$ e $\hat{n}_1$, con θ_2 l'angolo tra la velocità $\vec{v}_2$ e $\hat{n}_2$, e così via, fino a θ_N che è l'angolo tra la velocità $\vec{v}_N$ e $\hat{n}_N$. Possiamo quindi definire il *flusso elementare* $\Delta\Phi_i$ attraverso la superficie elementare ΔS_i $(1 = 1, ..., N)$ come

$$\Delta\Phi_i \doteq |\vec{v}_i|.\ \Delta S_i\ \cos\ \theta_i \equiv \vec{v}_i \cdot \hat{n}_i\ \Delta S_i,\ 1 = 1, ..., N. \tag{6}$$

Ovviamente, il flusso totale $\Phi_S(\vec{v})$ del campo velocità attraverso la superficie S è dato dalla somma di tutti i flussi elementari

$$\Phi_S(\vec{v}) \doteq \sum_{i=1}^{N} \Delta\Phi_i \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \cdot \hat{n}_i\ \Delta S_i. \tag{7}$$

Naturalmente, più si scelgono piccole le superfici elementari e più il calcolo è accurato. Nel limite matematico nel quale tutte le superfici elementari diventano infinitesime, il calcolo diventa esatto, e la somma nell'equazione (7) diventa quello che prende il nome di *integrale di superficie*:

$$\Phi_S(\vec{v}) \doteq \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} \, dS. \tag{8}$$

Il significato di questa relazione non è sostanzialmente dissimile da quello della (7): qui dS è la generica superficie elementare diventata infinitesima. $\hat{n}$ è il versore perpendicolare a dS, $\vec{v}$ è il valore della velocità su dS, e $\int_S$ indica che si devono sommare tutti i contributi delle superfici infinitesime dS che compongono la superficie totale S.

Armati del concetto di flusso, andiamo ora a considerare particolari superfici, cioè le *superfici chiuse* (per esempio, una sfera). Le superfici chiuse hanno una peculiarità: di esse si può definire un *interno* ed un *esterno*. Riprendiamo allora una cosa che abbiamo lasciato in sospeso; nel definire il versore $\hat{n}$ normale ad una superficie, abbiamo detto che dei due possibili versi ne sceglievamo uno a piacere. Nel caso di una superficie chiusa scegliamo invece sempre la seguente convenzione: *il verso dei versori $\hat{n}$ perpendicolari nei vari punti della superficie chiusa deve puntare sempre verso l'esterno della superficie*. Per esempio, nel caso di una sfera, i versori perpendicolari alla superficie hanno sempre la direzione dei raggi (perchè ogni raggio è perpendicolare alla superficie): secondo la nostra convenzione, il loro verso deve essere quello che si allontana dal centro della sfera.

Perchè ci interessano tanto le superfici chiuse? La risposta è in quella che chiameremo una prima versione del Teorema di Gauss nel caso fluidi. Il concetto è molto semplice. Innaginiamo una superficie chiusa piazzata nella regione di spazio dove è presente il fluido che stiamo studiando. Consideriamo il caso in cui ci troviamo in presenza di due sorgenti, una positiva (un rubinetto) ed una negativa (uno scarico). L'immagine di una vasca da bagno renderà bene l'idea. Piazziamo idealmente la nostra superficie chiusa al centro della vasca: allora, è evidente che l'acqua prima entra e poi esce, e *il flusso totale sarà nullo*, poichè alla parte di flusso entrante (l'acqua che entra) bisognerà sottrarre quella uscente (l'acqua che esce) ed il bilancio totale sarà nullo.

Se però piazziamo idealmente la nostra superficie chiusa in modo che racchiuda il rubinetto (la sorgente positiva) l'acqua uscirà solo dalla superficie, ed il flusso sarà diverso da zero, e proporzionale alla potenza del rubinetto. Se piazziamo idealmente la nostra superficie chiusa in modo che racchiuda lo scarico (la sorgente negativa) l'acqua entrerà solo nella superficie, ed il flusso sarà diverso da zero (e di segno opposto a quello generato dal rubinetto), e proporzionale alla potenza dello scarico. Ovviamente, se piazziamo idealmente la nostra superficie chiusa in modo che racchiuda *sia* il rubinetto (la sorgente positiva) lo scarico (la sorgente negativa), il flusso sarà la somma algebrica dei flussi delle due sorgenti, e dipenderà dalle loro potenze. Naturalmente, questo discorso si può estendere ad un qualsiasi numero di sorgenti. Abbiamo visto quindi che il flusso attraverso una superficie chiusa dipende da tutte e sole le sorgenti *interne* alla superficie. È anche chiaro che, ai fini delll'entità del flusso *la forma della superficie chiusa è ininfluente*: conta solo quali sorgenti ci sono all'interno, e qual'è la loro potenza.

Ne possiamo concludere che: *il flusso di un fluido attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla somma algebrica delle potenze delle sole sorgenti racchiuse all'interno della superficie stessa.* Questa è una prima versione del Teorema di Gauss nel caso fluidi.

Un'ultima parola sul fatto che qua parliamo di flusso del campo velocità, mentre all'inizio parlavamo (come si fa di solito) di flusso della massa del fluido o "portata"; il fatto è che basta moltiplicare opportunamete tutte le quantità per la densità di massa del fluido per passare dal flusso di velocità alla portata.

La definizione di campo elettrico

Torniamo ora al caso di una carica elettrica puntiforme q. Vogliamo introdurre dei concetti, ed un corrispondente formalismo, del tipo di quelli usati nel caso dei fluidi. Allora, così come rubinetto e scarico erano le sorgenti (positiva e negativa) del campo di velocità del fluido, diremo che *le cariche elettriche positive e negative sono le sorgenti positive e negative di un campo vettoriale che chiameremo campo elettrico* $\vec{E}$. Per la precisione, trattando solo il caso statico, il campo $\vec{E}$ è quello che viene chiamato *campo elettrostatico*, ma per semplicità diremo semplicemente campo elettrico. Data una carica puntiforme Q, diremo che *il campo elettrico generato da* Q *è la modifica delle condizioni fisiche causata da questa carica in tutti i punti dello spazio circostante.* Il problema, però, è che a questa affermazione deve corrispondere una definizione operativa di $\vec{E}$, il che significa che, data la carica

Q nel vuoto, dobbiamo fornire una prescrizione che ci permetta di misurare il campo $\vec{E}$ in ogni punto P dello spazio intorno a Q. Ora, quello che abbiamo a disposizione, e che possiamo misurare, è la forza di Coulomb (3) che si esercita tra *due* cariche puntiformi. Andiamo quindi a mettere nel punto P dello spazio, nel quale vogliamo misurare il campo $\vec{E}$ generato dalla carica originaria Q, una *carica di prova* q, e misuriamo la forza di Coulomb che Q esercita su q; se il punto P è a distanza r da Q, la (3) ci dice che

$$\vec{F}_{Qq} = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q\,q}{r^2}\,\hat{r}, \tag{9}$$

dove il versore $\hat{r}$ ha verso che va da Q a q. Ricordiamoci però che il campo elettrico generato da Q, cioè la modifica dello spazio circostante, deve dipendere *solo* da Q; potremmo quindi definire il campo di Q come

$$\vec{E}_{Qq} \doteq \frac{\vec{F}_{Qq}}{q}.$$

Ma sappiamo anche dalla discussione sui fluidi che se mettiamo *due* sorgenti (in questo caso Q *e* q, il campo risultante *non è* quello di Q (per esempio, se cè solo Q ed è positivo (un "rubinetto"), il fluido si dispone a raggiera e le sue linee di flusso vanno tutte all'infinito; ma se aggiungiamo una carica di prova q negativa (uno "scarico") il campo di velocità verrà deformato, perchè molte linee di flusso, invece di dirigersi all'infinito, andranno a confluire in q, cioè nello "scarico"). Quindi, il campo elettrico così definito dipenderà ancora dalla carica di prova q e *non* sarà il campo di Q. Come risolviamo questo problema? Ci viene in mente che, man mano che la carica di prova q diventa più piccola, la deformazione ad essa dovuta del campo di Q diminuisce e, se q è "sufficientemente piccola", questa deformazione diventa trascurabile, ed il campo definito misurando la forza tra Q e q, e poi dividendola per q, diventa sostanzialmente il campo di Q. Allora, effettuiamo quello che abbiamo chiamato un "procedimento fisico di limite", seguendo, per esempio, un protocollo, che ora descriviamo, costituito da una sequenza di "passi" a ciascuno dei quali corrisponde una misura.

Passo 1) Partiamo da una prima carica di prova q scelta arbitrariamente e piazzata nel punto P a distanza r da Q, misuriamo la forza $\vec{F}_{Qq}$, e definiamo un primo campo elettrico, che dipenderà da q oltre che da Q, come

$$\vec{E}_q \doteq \frac{\vec{F}_{Qq}}{q},$$

dove con la notazione E_q abbiamo messo in evidenza il fatto che stiamo usando la carica di prova q;

Passo 2) Dimezziamo la carica di prova, passando a piazzare nello stesso punto P a distanza r da Q una carica di prova $q/2$, misuriamo la forza $\vec{F}_{Q(q/2)}$, e definiamo un secondo campo elettrico, che dipenderà da $q/2$ oltre che da Q, come

$$\vec{E}_{(q/2)} \doteq \frac{\vec{F}_{Q(q/2)}}{(q/2)};$$

ci aspettiamo ovviamente che $q/2$ perturbi meno di q il campo di Q;

Passo 3) Dimezziamo ancora la carica di prova, passando a piazzare nello stesso punto P a distanza r da Q una carica di prova $q/4$, misuriamo la forza $\vec{F}_{Q(q/4)}$, e definiamo un terzo campo elettrico, che dipenderà da $q/2$ oltre che da Q, come

$$\vec{E}_{(q/4)} \doteq \frac{\vec{F}_{Q(q/4)}}{(q/4)}.$$

Continuando il procedimento, la carica di prova diventerà $q/8, q/16, ..., q/(2^n)$, dove n è un intero che, in principio, può essere aumentato a piacimento; in corrispondenza, la carica di prova diventerà sempre più piccola, ed i campi $\vec{E}_q, \vec{E}_{(q/2)}, \vec{E}_{(q/4)}, \vec{E}_{(q/8)}, ..., \vec{E}_{(q/(2^n))}$ forniranno una misura del campo elettrico di Q sempre meglio approssimata. Allora, fissato un errore (per esempio sulla decima cifra decimale) quando dimezzando ulteriormente la carica dopo un certo n il campo elettrico non varia nei limiti di questo essrore, allora diciamo che abbiamo misurato, e quindi definito, il campo elettrico della sola carica Q (almeno nei limiti di questo errore). Si noti che, nel limite nel quale n diventa molto grande, la carica di prova "tende a zero"; allora il procedimento fisico che abbiamo descritto si riassume nella seguente definizione del campo elettrico generato da Q:

$$\vec{E} \doteq \text{"}\lim_{q\to 0}\text{"} \frac{\vec{F}_{Qq}}{q}, \tag{10}$$

dove le virgolette indicano che stiamo eseguendo un limite fisico nel senso precedentemente descritto, e non un limite matematico.

Adesso notiamo che questa definizione ci dà per il campo di Q in un punto

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r^2}\ \hat{r}. \tag{11}$$

Si noti che questa formula, che fornisce il campo elettrico generato da una carica puntiforme, si ottiene dal rapporto tra la forza esercitata da Q su una carica di prova q, e la carica q stessa, *qualsiasi sia l valore di* q. Allora ci possiamo domandare: perchè abbiamo fatto tutto il procedimento precedente di "limite fisico"? La risposta è che la formula (11) non può ridursi ad un semplice procedimento matematico di rapporto tra due oggetti, ma, almeno in principio, deve essere verificata tramite *misura* (come si fa per definire qualsiasi randezza fisica); questo giustifica la discussione precedente.

Innanzitutto, analizziamo le dimensioni fisiche del campo elettrico (troveremo poi unità più convenienti quando introdurremo il potenziale elettrico):

$$[E] = [F/q] = [N/C].$$

Notiamo poi che il verso di $\vec{E}$ dipende dal *segno* della carica. Infatti, se Q è positiva, il verso è quello del versore $\hat{r}$ che, come sappiamo, va da Q al punto nel quale vogliamo calcolare $\vec{E}$, e quindi è *uscente* dalla carica. Se invece Q è negativa, il verso è quello opposto al versore $\hat{r}$, e quindi è *puntato verso la carica.*

Notiamo ancora che, essendo un campo elettrico un vettore, se abbiamo più cariche quntiformi $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, che generano campi $\vec{E}_1, \vec{E}_2, ..., \vec{E}_n$, ciascuno della forma (11), possiamo calcolare il campo *totale* generato dalle n cariche semplicemente sommando vettorialmente gli n campi

$$\vec{E}^n_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n \tag{12}$$

Quindi: *noto il campo generato da una carica puntiforme, è possibile calcolare il campo totale generato da una distribuzione qualsiasi di cariche.* Si noti che questo è vero anche per distribuzioni *continue* di carica (per esempio, distribuite su una superficie o in un volume. Basta infatti adottare il solito procedimento di dividere la superficie (o il volume) in tante superfici (volumi) elementari, in modo che la carica concentrata su una superficie (o su un volume), carica che ovviamente è anch'essa elementare (al limite, infinitesima) possa essere considerata puntiforme. Di ciascuna carica elementare si calcola il campo eletrrico secondo la (11), e poi tutti questi campi (ovviamente elementari) si sommano vettorialmente. Chiaramente, nel caso di distribuzioni continue di carica otterremo, al limite, il campo totale come un integrale (di superficie o di volume).

Avendo ora a disposizione l'espressione del campo elettrico possiamo passare a dimostrare il Teorema di Gauss nel caso elettrostatico. Ovviamente, partiamo dal campo (11) di una carica puntiforme.

Preliminarmente, però, ci conviene definire, analogamente al caso dei fluidi, le *linee di flusso* di $\vec{E}$: *una linea di flusso di un campo elettrico* $\vec{E}$ *è una linea che in ogni punto dello spazio è tangente al campo* $\vec{E}$ *in quel punto, ed è orientata nel verso di* $\vec{E}$ *in quel punto.* Questa definizione vale per un campo elettrico qualsiasi. Vediamo però ora come sono fatte le linee di forza del campo di una carica puntiforme; dalla (11) vediamo che questo campo è *radiale*, cioè la sua direzione è sempre quella dei raggi che si diramano in tutte le tre direzioni dal punto nel quale è Q: *quindi, le linee di flusso del campo elettrico di una carica puntiforme sono le semirette che hanno origine in* Q *e vanno all'infinito.* Il verso delle linee di forza è quello di $\vec{E}$; quindi, se la carica è positiva le semirette *escono* dalla carica, se la carica è negativa le semirette *entrano* nella carica. Questo rende, anche visivamente, evidente l'analogia con il "rubinetto" (carica positiva) e lo "scarico" (carica negativa) del fluido.

Tornando al problema del Teorema di Gauss nel caso elettrostatico, inazitutto, data una superficie S, possiamo definire il *flusso totale del campo elettrico* $\vec{E}$ *attraverso* S, $\Phi_S(\vec{E})$, in modo del tutto analogo al caso dei fluidi sostituendo il campo di velocità $\vec{v}$ con il campo $\vec{E}$, nella (7)

$$\Phi_S(\vec{E}) \doteq \sum_{i=1}^{N} \Delta\Phi_i \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \, \Delta S_i, \tag{13}$$

o nella (8)

$$\Phi_S(\vec{E}) \doteq \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS, \tag{14}$$

dove ora naturalmente il flusso elementare attraverso ΔS_i è $\Delta\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \, \Delta S_i$, $\vec{E}_i$ denota il valore praticamente costante del campo elettrico sulla superficie elementare ΔS_i, $\hat{n}_i$ è il versore perpendicolare a ΔS_i.

Vediamo che le dimensioni del flusso di un campo elettrico sono quelle del campo moltiplicate per una superficie; nel sistema MKSQ abbiamo allora

$$[\Phi_S(\vec{E})] = [E \cdot S] = [N \cdot m^2 \cdot C^{-1}.$$

Per dimostrare il Teorema di Gauss, dobbiamo ora considerare una superficie *chiusa*, adottando sempre la convenzione che se la superficie è chiusa i versori delle superfici elementari che compaione nel flusso hanno un verso che punta verso l'esterno della superficie. Abbiamo anche capito, nel caso dei fluidi, perchè il flusso attraverso una superficie chiusa non deve dipendere dalla forma della superficie, ma solo dalla disposizione delle sorgenti. Quindi, possiamo dimostrare il Teorema di Gauss per il campo generato da una carica puntiforme Q usando una particolare superficie chiusa che ci faciliti il conto. Consideriamo quindi una sfera con il centro che coincide col punto nel quale è piazzata la carica Q, e di raggio generico r. Vediamo allora dall'espresione (11) che, essendo il campo diretto lungo i raggi, esso è, come i raggi, perpendicolare alla superficie sferica in ogni punto; inoltre, il suo modulo dipende solo da r ed, essendo ovviamente r costante su ogni punto della sfera (ne è il raggio), anche il modulo di $\vec{E}$ è costante in ogni punto della sfera. Consideriamo allora il flusso elementare del campo attraverso una superficie elementare della sfera ΔS_i:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_i &= \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \, \Delta S_i = |\vec{E}| \; \cos\, \theta \, \Delta S_i \\ &= |\vec{E}| \; \cos\, 0^\circ \, \Delta S_i = |\vec{E}| \, \Delta S_i \; , \end{aligned} \tag{15}$$

dove abbiamo usato il fatto che il modulo di $\vec{E}$ è costante (e quindi non dipende dalla superficie, cioè dall'indice i), la definizione di prodotto scalare tra due vettori, il fatto che $|\hat{n}_i| = 1$ per definizione, e il fatto che, essendo sia il campo che $\hat{n}_i$ perpendicolari a ΔS_i (che sta sulla sfera), tra loro sono paralleli, l'angolo che formano è quindi nullo, ed il coseno vale 1.

Adesso calcoliamo il flusso totale secondo la definizione (13), inserendo l'espressione (15) del flusso elementare ottenuto in questo caso:

$$\Phi_S(\vec{E}) \doteq \sum_{i=1}^{N} \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{N} |\vec{E}| \; \Delta S_i = |\vec{E}| \; \sum_{i=1}^{N} \; \Delta S_i = |\vec{E}| \; S, \tag{16}$$

dove $|\vec{E}|$ va fuori della somma perchè è costante, e la somma di tutte le superfici elementari della sfera è ovviamente la superficie totale S della sfera.

Ora, dalla (11) vediamo che

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^2},$$

e sappiamo che la superficie della sfera di raggio r è

$$S = 4\,\pi\,r^2.$$

Inserendo questi valori nella (16) abbiamo

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}\cdot 4\,\pi\,r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{17}$$

Quindi, poichè il flusso non dipende dalla forma della superficie (cosa di cui possiamo convincerci osservando che il numero di linee di flusso radiali che attraversa la sfera centrata in Q è lo stesso di quelle che attraversano una qualsiasi altra superficie chiusa che racchiude la carica), possiamo enunciare il Teorema di Gauss per una carica puntiforme:

Il flusso del campo elettrico generato da una carica puntiforme racchiusa da una superficie S è pari alla carica divisa per la costante dielettrica del vuoto ϵ_0.

In formula

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{18}$$

Ora, come ultimo passo, dobbiamo notare che, nel caso di più cariche puntiformi $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ racchiuse in una superficie S, il campo totale, dato dalla (12), ha flusso attraverso S dato, usando per comodità la dfinizione simbolica (14), da

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\vec{E}) &= \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\;dS = \int_S [\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n]\cdot\hat{n}\;dS \\
&= \int_S \vec{E}_1\cdot\hat{n}\;dS + \int_S \vec{E}_2\cdot\hat{n}\;dS + ... + \int_S \vec{E}_n\cdot\hat{n}\;dS \\
&= \Phi_S(\vec{E}_1) + \Phi_S(\vec{E}_2) + ... + \Phi_S(\vec{E}_n) \\
&= \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} + ... + \frac{Q_n}{\epsilon_0} \equiv \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0}\;, \qquad (19)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali, ed il Teorema di Gauss (18) per ognuna delle cariche puntiformi $Q_1, Q_2, ..., Q_n$. Siccome $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ non è altro che la carica totale *interna* alla superficie, che indichiamo con Q_{tot}^{int}, e poi chè le cariche *esterne alla superficie* non contribuiscono al flusso (perchè le linee di forza prima entrano e poi escono dalla superficie e il bilancio è nullo), possiamo enunciare il Teorema di Gauss (valido anche nel caso di distribuzioni continue di carica) nella sua forma più generale:

Il flusso attraverso una superficie chiusa di un campo elettrico generato da una distribuzione di carica è uguale alla carica totale interna alla superficie divisa per la costante dielettrica del vuoto ϵ_0
cioè

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}^{int}}{\epsilon_0}. \tag{20}$$

Per capire come funziona il Teorema di Gauss, vediamo questo esempio

Esercizio 1): Calcolare il flusso del campo elettrico dovuto a tre cariche puntiformi

$$Q_1 = 10^{-5}\ C\ ,\ Q_2 = -\ 2 \cdot 10^{-5}\ C\ ,\ Q_3 = 4 \cdot 10^{-5}\ C,$$

attraverso una superficie chiusa S che racchiude solo Q_2 e Q_3.
Soluzione: Le uniche cariche interne sono Q_2 e Q_3 (Q_1 quindi non contribuisce al flusso); la carica totale interna è quindi

$$Q_{tot}^{int} = Q_2 + Q_3 = (-\ 2 + 4) \cdot 10^{-5}\ C = 2 \cdot 10^{-5}\ C.$$

Il Flusso, secondo la (20), è quindi

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0} \approx \frac{2 \cdot 10^{-5}}{8.859 \cdot 10^{-12}} \approx 2.25 \cdot 10^{-6}\ fracN\ m^2C.$$

Abbiamo finora considerato il solo il caso di una o più cariche puntiformi. Tuttavia, in generale le cariche, a livello macroscopico, sono distribuite in maniera "continua" nel volume occupato da un corpo (cariche di volume), o sulla superficie di un corpo (cariche di superficie). Anche in questo caso vale il teorema di Gauss nella forma (20), dove la carica totale interna può essere anche una carica, o parte di una carica, di volume o di superficie. Per poter tenere conto anche delle cariche distribuite in modo continuo, introduciamo i concetti di *densità di carica per unità di volume (o volumica) o* *densità di carica per unità di superficie (o superficiale)*. Il caso più semplice si ha quando la carica è distribuita uniformemente nel volume o sulla superficie, cioè quando la sua densità è *costante* (nel senso che non dipende dalla particolare zona nel volume o sulla superficie che andiamo a considerare). In questo caso, le espressioni delle densità di carica sono molto semplici. Infatti, denotata con la lettera greca ρ (che si legge "ro") la densità di carica per unità di volume, e con la lettera greca σ (che si legge "sigma") a densità di carica per unità di superficie, in questo caso semplice abbiamo che

$$\rho \doteq \frac{Q_{tot}}{V} \ \ ; \ \ \sigma \doteq \frac{Q_{tot}}{S} \ , \tag{21}$$

dove Q_{tot} denota la carica totale concentrata nel corpo, e V ed S denotano il volume e la superficie del corpo, rispettivamente. Naturalmente, si possono ottenere densità di carica costanti solo se c'è una particolare simmetria (per esempio, se il corpo è di forma sferica). Analizziamo prima di tutto, come al solito, le dimensioni fisiche delle due densità:

$$[\rho] = [Q \cdot V^{-1}] = [Q \cdot l^{-3}] \ \ ; \ \ [\sigma] = [Q \cdot S^{-1}] = [Q \cdot l^{-2}] \ ; \tag{22}$$

Quindi, nel sistema MKSQ, ρ si misura in *Coulomb diviso metri cubi*, mentre σ si misura in *Coulomb diviso metri quadrati*. Vediamo poi che in questo caro semplice la carica totale concentrata su un qualsiasi volume V è data da

$$Q_{tot} = \rho \, V \ , \tag{23}$$

e quella concentrata su una qualsiasi superficie S è data da

$$Q_{tot} = \sigma \, S \ . \tag{24}$$

Adesso, che succede se le densità non sono costanti, ma dipendono da dove ci mettiamo nel volume o sulla superficie? In questo caso, dobbiamo ricorrere ad un metodo che abbiamo incontrato spesso nel corso, cioè quello di considerare il volume del corpo diviso in tanti volumetti elementari, o la sua superficie divisa in tante superfici elementari. Volume elementare significa qui che esso è così piccolo che la densità volumica di carica ρ si può considerare con buona approssimazione costante al suo interno; e, analogamente, superficie elementare significa che essa è così piccola che la densità superficiale di carica σ si può considerare con buona approssimazione costante sui suoi punti. Supponiamo allora di aver diviso il volume totale V in N "volumetti" ΔV_i, ciascuno dei quali contiene una piccola carica ΔQ_i $(i = 1, ..., N)$; e supponiamo di averlo fatto in modo tale che il valore, che indicheremo con ρ_i, della densità volumica di carica su ΔV_i risulti con buona approssimazione indipendente dal particolare punto in ΔV_i $(i = 1, ..., N)$. Allora, ricadiamo nel caso semplice precedente di densità volumica costante e possiamo scrivere

$$\rho_i \doteq \frac{\Delta Q_i}{\Delta V_i} \ . \tag{25}$$

Analogamente, nel caso di densità superficiale, supponiamo di di aver diviso la superficie totale S in N "piccole superfici" ΔS_i, ciascuno delle quali contiene una piccola carica ΔQ_i $(i = 1, ..., N)$; e supponiamo di averlo fatto in modo tale che il valore, che indicheremo con σ_i, della densità superficiale di carica su ΔS_i risulti con buona approssimazione indipendente dal particolare punto in ΔS_i $(i = 1, ..., N)$. Allora, ricadiamo nel caso semplice precedente di densità superficiale costante e possiamo scrivere

$$\sigma_i \doteq \frac{\Delta Q_i}{\Delta S_i} \ . \tag{26}$$

Ora, ricaviamo dalla definizione (25) la carica ΔQ_i contenuta nel volumetto ΔV_i:

$$\Delta Q_i = \rho_i \, \Delta V_i \ . \tag{27}$$

Questa è la carica elementare contenuta nel volumetto i-esimo tra gli N volumetti nei quali abbiamo diviso il volume totale V del corpo carico; ma allora, la carica totale Q_{tot} contenuta in questo corpo sarà data dalla somma di tutte queste cariche elementari, cioè da

$$Q_{tot} = \sum_{i=1,\dots,N} \Delta Q_i \equiv \sum_{i=1,\dots,N} \rho_i \, \Delta V_i \ , \tag{28}$$

dove abbiamo usato l'Eq (27).

Analogamente, nel caso di densità superficiale, ricaviamo dalla definizione (26) la carica ΔQ_i contenuta nella piccola superficie ΔS_i:

$$\Delta Q_i = \sigma_i \, \Delta V_i \ . \tag{29}$$

Usando ora questa relazione, e ripetendo il discorso fatto nel caso di densità volumica, denotata con Q_{tot} la carica totale concentrata sulla superficie del corpo carico, abbiamo

$$Q_{tot} = \sum_{i=1,\dots,N} \Delta Q_i \equiv \sum_{i=1,\dots,N} \sigma_i \, \Delta V_i \ . \tag{30}$$

Supponiamo di nuovo il caso semplice in cui la densità volumica o quella superficiale sono costanti su tutto il corpo; questo significa che non dipendono dal particolare volumetto ΔV_i o dalla particolare piccola superficoe ΔS_i o, in altre parole, non dipendono dall'indice i: $\rho_i \equiv \rho$ per ogni i, oppure $\sigma_i \equiv \sigma$ per ogni i. Allora dalle Eq. (28) e (30) ricaviamo:

$$Q_{tot} = \sum_{i=1,\dots,N} \rho \, \Delta V_i = \rho \sum_{i=1,\dots,N} \Delta V_i \equiv \rho \cdot V \ , \tag{31}$$

e

$$Q_{tot} = \sum_{i=1,\dots,N} \sigma \, \Delta S_i = \sigma \sum_{i=1,\dots,N} \Delta s_i \equiv \sigma \cdot S \ , \tag{32}$$

dove abbiamo tenuto conto che, sommando tutti i volumetti elementari o tutte le superfici elementari, si ottengono, rispettivamente, il volume e la superficie totali del corpo. Ora, dividendo la (31) per V e la (32) per S, riotteniamo le definizioni (21) per le due densità nel caso semplice, come deve essere.

Si noti anche che, come abbiamo visto in altri contesti, le espressioni ai secondi membri delle Eq. (28) e (30) nel limite in cui tutti i volumetti, o tutte le piccole superfici, "tendono a zero" prendono il nome di *integrale esteso al volume V della densità volumica ρ*, o di *integrale esteso alla superficie S della densità superficiale σ*; le equazioni si riscrivono allora simbolicamente:

$$Q_{tot} = \int_V \rho \, dV \ , \tag{33}$$

e

$$Q_{tot} = \int_S \sigma \, dS \ . \tag{34}$$

Comunque, il significato è il solito: il secondo membro della (28) approssima entro un errore arbitrariamente pre-fissato il secondo membro della (33) se i volumetti ΔV_i sono scelti abbastanza piccoli, e il secondo membro della (30) approssima entro un errore arbitrariamente pre-fissato il secondo membro della (34) se le superfici ΔS_i sono scelte abbastanza piccole. D'altra parte, è questo il metodo con cui un computer calcola un integrale.

Facciamo ora degli altri esercizi sul teorema di Gauss nel caso in cui abbiamo distribuzioni continue di carica.

Esercizio 2): Calcolare il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa qualsiasi che racchiude metà della superficie di un corpo sferico dotato di densità superficiale di carica σ costante, il cui valore è $\sigma = 3 \cdot 10^{-5}\ C/m^2$. Il raggio R del corpo sferico vale $R = 10cm$. (Avvertenza: non confondere la superficie di Gauss, che può avere forma qualsiasi, con la metà della superficie del corpo sferico!)
Soluzione: Il teorema di Gauss (20) ci dice che conta solo la carica totale interna. Il dato che abbiamo è che solo metà della superficie del corpo sferico è interna alla superficie di Gauss; quindi, il flusso sarà determinato solo dalla carica concentrata nella metà sferica racchiusa. Sappiamo anche che la densità superficiale σ è costante; siamo quindi nel caso semplice data dalla seconda relazione nella (21), e la relazione (24) ci dice che la carica concentrata sulla metà del corpo sferico è data dal prodotto della densità σ per la superficie di metà della sfera di raggio R. Ora, la superficie della sfera di raggio R è $4\ \pi\ R^2$; la metà è quindi $2\ \pi\ R^2$. La carica totale interna alla superficie di Gauss, cioè quella di metà sfera, è allora

$$Q_{tot}^{int} = \sigma \cdot (2\ \pi\ R^2).$$

Per inserire i numeri dobbiamo prima trasformare tutto in MKSQ; quindi

$$R = 10\ cm = 10^{-1}\ m.$$

A questo punto abbiamo

$$Q_{tot}^{int} = 3 \cdot 10^{-5} \cdot (6.28 \cdot 10^{-2}) = 18.84 \cdot 10^{-7}\ C.$$

Il teorema di Gauss (20) ci dà allora

$$\Phi_S(\vec{E}) = (18.84 \cdot 10^{-7})/(8.859 \cdot 10^{-12}) \approx 2.12 \cdot 10^5\ (N \cdot m)/C.$$

Esercizio 3): Una superficie chiusa S racchiude completamente un corpo sferico di raggio $R = 20cm$, nel cui volume è presente una densità volumica di carica ρ costante. Sapendo che il flusso attraverso la superficie chiusa S del campo elettrico $\vec{E}$ generato dalla densità ρ vale

$$\Phi_S(\vec{E}) = 5 \cdot 10^5 \ (N \cdot m)/C$$

calcolare il valore della densità ρ.
Soluzione: Poichè il corpo è completamente racchiuso in S, la carica interna ad S è *tutta* la carica del corpo. Il volume del corpo sferico di raggio R è $V = (4/3)\ \pi\ R^3$. Trasformiamo il raggio in metri

$$R = 20\ cm = 0.2\ m.$$

Essendo ρ costante, la carica totale è data dalla (23); abbiamo quindi che la carica del corpo, che coincide con la carica totale interna ad S è data da

$$Q_{tot}^{int} = \rho \cdot [(4/3)\ \pi\ R^3] \approx 3.3 \cdot 10^{-2}) \cdot \rho.$$

Il teorema di Gauss (20) ci dà

$$\Phi_S(\vec{E}) = (\approx 3.3 \cdot 10^{-2} \cdot \rho)/(8.859 \cdot 10^{-12}) \approx 3.7 \cdot 10^9,$$

da cui

$$\rho = (\Phi_S(\vec{E})/3.7) \cdot 10^{-9} = (5/3.7) \cdot 10^5 \cdot 10^{-9} \approx 1.35 \cdot 10^{-4} C/m^3.$$

Esercizio 4): Una superficie chiusa S racchiude completamente due corpi sferici di raggi $R_1 = 25cm$ e $R_2 = 50cm$. Nel volume del primo corpo è presente una densità volumica di carica ρ_1 costante, il cui valore è $\rho_1 = 4 \cdot 10^{-4} C/m^3$. Nel volume del secondo corpo è presente una densità volumica di carica ρ_2 costante, il cui valore è da determinare. Sapendo che il flusso totale $\Phi_S(\vec{E})$ attraverso S del campo generato dalle cariche dei due corpi vale $\Phi_S(\vec{E}) = 8 \cdot 10^5\ (Ncdotm)/C$, calcolare ρ_2.
Soluzione: Ripetendo il discorso di prima per ognuno dei due corpi sferici, abbiamo che le cariche totali Q_1 e Q_2 del primo e del secondo corpo sono, rispettivamente,

$$Q_1 = \rho_1 \cdot [(4/3)\ \pi\ R_1^3],$$

e

$$Q_2 = \rho_2 \cdot [(4/3)\ \pi\ R_2^3].$$

Conoscendo ρ_1 e R_1 possiamo calcolarci la carica Q_1 dopo aver trasformato in metri R_1

$$R_1 = 25\ cm = 0.25\ m,$$

$$Q_1 \approx (4 \cdot 10^{-4}) \cdot (6.5 \cdot 10^{-2}) = 2.6 \cdot 10^{-7}\ C.$$

Possiamo anche, dopo dopo aver trasformato in metri $R_"$, calcolare Q_2

$$R_1 = 50\ cm = 0.5\ m,$$

$$Q_2 \approx 5.2 \cdot 10^{-1} \cdot \rho_2\ C.$$

Essendo tutte e due i corpi completamente racchiusi da S, la carica totale interna sarà data dalla somma delle cariche dei due corpi

$$Q_{tot}^{int} = Q_1 + Q_2 = 2.6 \cdot 10^{-7} + 5.2 \cdot 10^{-1} \cdot \rho_2.$$

Il teorema di Gauss (20), inserendo questa relazione ed il valore del flusso, ci dà

$$8 \cdot 10^5 = (2.6 \cdot 10^{-7} + 5.2 \cdot 10^{-1} \cdot \rho_2)/(8.859 \cdot 10^{-12}),$$

da cui

$$8{\cdot}10^5 = (2.6{\cdot}10^{-7})/(8.859{\cdot}10^{-12}+(5.2{\cdot}10^{-1}{\cdot}\rho_2)/(8.859{\cdot}10^{-12} \approx 2.9{\cdot}10^4+5.8{\cdot}10^{10}{\cdot}\rho_2,$$

cioè

$$8 \cdot 10^5 \approx 2.9 \cdot 10^4 + 5.8 \cdot 10^{10} \cdot \rho_2.$$

Da questa relazione ricaviamo

$$5.8 \cdot 10^{10} \cdot \rho_2 = 8 \cdot 10^5 - 2.9 \cdot 10^4,$$

e quindi

$$\rho_2 = (8 \cdot 10^5 - 2.9 \cdot 10^4)/(5.8 \cdot 10^{10}).$$

Ci conviene scrivere $2.9 \cdot 10^4) = 0.29 \cdot 10^5$), e quindi

$$\rho_2 = (8 \cdot 10^5 - 0.29 \cdot 10^5)/(5.8 \cdot 10^{10}) \approx 1.33 \cdot 10^{-5}\ C.$$

Conseguenze del Teorema di Gauss sulla distribuzione di carica nei conduttori in condizioni elettrostatiche

Vedremo ora che il Teorema di Gauss abbinato all'imposizione di condizioni elettrostatiche ha conseguenze importanti sulla distribuzione di carica nei conduttori. Dimostreremo infatti che:

In un conduttore in condizioni elettrostatiche le cariche si distribuiscono sulla del conduttore, mentre al suo interno non sono presenti.cariche.

Per dimnostrare questo assunto, consideriamo le conseguenze di tutto quanto supponiamo:

a) innanzitutto, stiamo considerando un conduttore, e quindi stiamo considerando un materiale nel quale le cariche *possono* muoversi;

b) però vogliamo anche che valgano le condizioni elettrostatiche, cioè imponiamo che le cariche nel conduttore *siano ferme*;

c) l'unico modo per soddisfare sia a) che b) è imporre che la forza che agisce sulle cariche sia *nulla*; infatti, se su una carica q all'interno del conduttore agisce una forza, sappiamo che per la legge di Newton e per il fatto che in un conduttore la carica può muoversi la carica effettivamente si sposterà, e le condizioni elettrostatiche saranno violate; d'altra parte, sappiamo anche che per esercitare una forza su una carica q dentro il conduttore è necessario avere un campo elettrico $\vec{E}$, così su q agirà la forza $\vec{F} = q\ \vec{E}$; se vogliamo che la forza sia nulla è necessario che *il campo elettrico nel conduttore sia nullo*: $\vec{E} = 0$ in qualsiasi punto *interno* al conduttore;

d) se immaginiamo *una qualsiasi superficie chiusa interna al conduttore*, il campo elettrico in ogni punto della superficie, che è un punto interno al conduttore, sarà nullo, e dunque sarà nullo anche il flusso del campo attraverso la superficie scelta; ma il teorema di Gauss (20) ci dice che se è nullo il flusso allora la carica totale interna alla superficie deve essere nulla anchèssa; poichè possiamo scegliere una qualsiasi superficie interna al conduttore, ne deriva che non ci sono cariche all'interno del conduttore;

e) dal discorso fatto risulta che le cariche, non potendo disporsi all'interno del conduttore, possono stare solo sulla superficie che delimita il conduttore.

L'assunto sarebbe dimostrato ma, in realtà rimane da dimostrare perchè le cariche sulla superficie del conduttore possono restare ferme; infatti, la presenza di cariche sulla superficie implica la presenza di un campo elettrico *non nullo* sui punti della superficie, campo che potrebbe far muovere le cariche e violare le condizioni elettrostatiche. Allora, la domanda che bisogna porsi è: quali condizioni deve soddisfare il campo elettrico sulla superficie affinchè le cariche non si muovano?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo tenere presente che al di fuori del conduttore cè il vuoto (o l'aria, che è lo stesso) che è un *isolante*; quindi, le cariche non possono muoversi verso *l'esterno*, anche se cè un campo elettrico, poichè dovrebbero muoversi in un isolante. Tuttavia, il campo elettrico deve soddisfare una condizione: *deve essere perpendicolare alla superficie del conduttore in ogni punto.* Infatti, se non lo fosse, essendo un vettore si potrebbe scomporre in due componenti tra loro ortogonali: una rispetto alla perpendicolare alla superficie (che tenderebbe a spostarla nel vuoto, il che non è possibile), ed un'altra rispetto alla *tangente* alla superficie *che potrebbe far muovere le cariche nel conduttore lungo, appunto, la superficie del conduttore stesso.* Quindi, per non contraddire le condizioni elettrostatiche il campo elettrico deve avere solo la componente perpendicolare alla superficie in ogni punto.

Si noti che abbiamo scoperto che una distribuzione superficiale di carica si può ottenere soltanto usando un conduttore, mentre una distribuzione volumica di carica si può ottenere soltanto usando un isolante (naturalmente sempre se siamo in condizioni elettrostatiche).

Il Teorema di Gauss applicato a superfici chiuse "elementari"

In alcuni casi risulta utile e necessario applicare il Teorema di Gauss a superfici chiuse "elementari" ΔS, cioè superfici chiuse costruite con un numero finito di superfici aperte, ciascuna delle quali è abbastanza piccola da poter considerare il campo elettrico praticamente costante sui suoi punti. Tipicamente, si considerano "cilindretti", costituiti quindi da due basi ΔS_1 e ΔS_2, e da una superficie laterale ΔS_L; se ognuna di queste tre superfici è abbastanza piccola da poter considerare il campo elettrico praticamente costante sui suoi punti, allora, denominati $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_L$ i corrispondenti valori (vettoriali) del campo elettrico sui loro punti, ed $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$, $\hat{n}_L$ i versori delle tre superfici che puntano verso l'esterno dela superficie chiusa totale, vediamo che la definizione (13) ci dà per il flusso totale (anch'esso "elementare") $\Delta\Phi_{\Delta S}$ l'espressione

$$\Delta\Phi_{\Delta S} \equiv \Delta\Phi_{\Delta S_1} + \Delta\Phi_{\Delta S_2} + \Delta\Phi_{\Delta S_L} = \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 \ \Delta S_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \ \Delta S_2 + \vec{E}_L \cdot \hat{n}_L \ \Delta S_L \ . \tag{35}$$

Useremo più avanti questa espressione.