← DAL QUADERNO 1

VITAGLIANO 18/10/11

TANTI AUGURI ANDREA

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix}$$

Regola di Sarrus

vale solo per matrici 3X3

$$\det(a) = a \quad \Longleftarrow \quad A = (a)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1) - (1\cdot 1) = -2$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -1 - 1 + 0 - 0 - (-2) - (-1) = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 10 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

Proprietà del determinante

1) $A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{matrix} A_{(1)} + C_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{matrix}$ $\qquad$ dove C_1 è un'altra riga

$$\det B = \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} C_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1,0) = (1,1) + (0,-1)$$

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=1} = \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=0} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=1}$$

2) $A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \alpha A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\det B = \alpha \det A$

es $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = 0+1$

$\det B = 0+2 = 2 \det A$

3) Se scambio due righe il det. cambia segno

es. $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2-0 = -2$ $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0+2 = 2$

hanno le righe scambiate

TRASPOSIZIONE

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$\downarrow$

$A^t \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

matrice trasposta di A

es $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij})$

$A^t = (b_{ij})$ $b_{ij} = a_{ji}$

4) $\det A = \det A^t$ $\Longrightarrow$ le prime tre proprietà 1) 2) e 3) valgono anche per le colonne

VITAGLIANO

Det e trasf. elem.

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} A_{(1)} + \alpha A_{(i)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$ trasf. elementare di 1ª specie

5) $A \xrightarrow{i \leftrightarrow j} A'$ $\det A' = -\det A$ " " " 2ª specie

$A \xrightarrow{\alpha i} A'$ $\det A' = \alpha \det A$ " " 3ª specie

$\boxed{es.}$

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} + \alpha A_{(i)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \alpha A_{(i)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$+ \alpha \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

Determinante di una matrice quadrata

25/10/11
VITAGLIANO

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \det A = \Sigma$$

riepilogo delle 5 proprietà della lezione del 18)

6) A ha due righe uguali $\Longrightarrow \det A = 0$

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} = A \qquad \det\begin{pmatrix} \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det A$$

visto che quando scambio due righe il det cambia segno, in questo caso ho che $\det A = -\det A$ è l'unico numero che accade in questo caso è lo zero.

6') la 6) vale anche per le colonne

7) se A ha una riga nulla $\Longrightarrow \det A = 0$ si può dimostrare dalla definizione di det di una matrice

8) $A_{(1)}\, A_{(2)} \ldots A_{(k)} \qquad C=(c_1 \ldots c_n)$

supp. hanno la stessa n-upla

Def

C è una combinazione lineare di $A_{(1)} \ldots A_{(k)} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, \alpha_1, \ldots \alpha_k$ (quante sono le n-uple di A) : $C = \alpha A_{(1)} + \alpha_2 A_{(2)} + \ldots \alpha_k A_{(k)}$

es. $K=1 \quad A_{(1)} = (a_1 \ldots a_n)$

$C = (c_1 \ldots c_n)$

$\exists\, \alpha_1 \quad C = \alpha_1 A_{(1)}$

$(c_1, \ldots c_n) = \alpha(a_1 \ldots a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots \alpha a_n)$

$c_1 = \alpha a_1$
$\vdots$
$c_n = \alpha a_n$

es) VITAGLIANO

$1\cdot(1\ 1\ 0)+(-1,1,0)=(0,2,0)$

* zero è sempre comb. lineare di una matrice

$\longmapsto$

$(1,1,0)$ $(-1,1,0)$ (a,b,c) con $c\neq 0$

è combinazione lineare delle altre due righe? NO.

$\longmapsto$

$(1,0,0,\dots\dots 0)$
$(0,1,0,0\dots\dots 0)$
$(0,0,1,\dots\dots 0)$
$\vdots$
$(0,0,0\dots\dots 0,1)$

$(c_1,c_2,\dots\dots c_n)$ è combinazione lineare di?

SI dove $\alpha_i=(c_1,c_2,c_3\dots c_n)$

$c_1(1,0,0\dots\dots 0)+$
$c_2(0,1,0,0\dots\dots 0)+$
$c_3(0,0,1\dots\dots 0)+$
$\vdots$
$c_n(0,0,0\dots\dots 1)+$

$\Downarrow$

$=(c_1,c_2,c_3\dots c_n)$

$\longmapsto$

8) $$\det\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A_{(n-1)}\\ \alpha_1A_{(1)}+\dots+\dots\alpha_{n-1}A_{(n-1)}\end{pmatrix}=\alpha_1\cancel{\det\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A_{(n-1)}\\ A_{(1)}\end{pmatrix}}+\alpha_2\cancel{\det\begin{pmatrix}A_{(2)}\\ \vdots\\ A_{(n-1)}\\ A_{(2)}\end{pmatrix}}+\dots+\alpha_{n-1}\cancel{\det\begin{pmatrix}A_{(1)}\\ \vdots\\ A\end{pmatrix}}$$

$= 0$

sono zero perché hanno ~~le ste~~ due righe dove l'una è comb. lin.

VITAGLIANO

dell'altra.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$(1\ 1\ 1\ 1) = (0\ 0\ 1\ 1) + (1\ 1\ 0\ 0) \Rightarrow \det = 0$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 0$$ (la prima e la terza colonna sono uguali)

$$\begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 0$$ perché una riga è nulla

$\boxed{\text{I regola di Laplace}}$ (calcolo del determinante)

Def sottomatrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

scelgo alcune righe e colonne

all'incrocio tra riga e colonna trovo un elemento

anche se lo faccio per tutte le possibili associazioni tra righe e colonne avrò una altra matrice detta sottomatrice

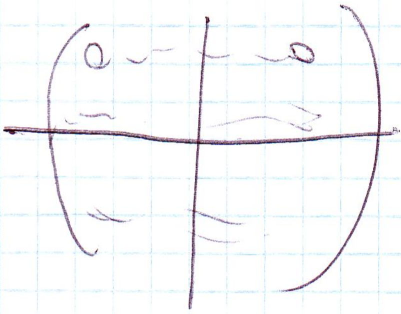
VITAGLIANO

es.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{sottomatrice}$$

da una matrice posso estrarre una ~~una~~ sottomatrice quadrata

Il det di una sottomatrice quadrata si chiama **minore**

Supp. che la matrice di partenza è quadrata



selez. una riga e una colonna e scelgo i valori restanti ed ottengo un'altra matrice quadrata, il minore complementare

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il min compl. = det della sottomatrice ottenuta e cioè $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

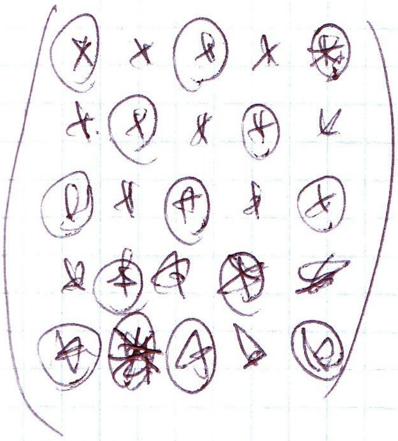
è il min. complementare dello di $\bar{A}_{(i,j)} \cdot (-1)^{i+j}$

Il complemento algebrico di $a_{(i,j)}$

COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{ij} = $(-1)^{i+j} \cdot \bar{A}(i,j) = A_{(i,j)}$

Def $i+j$ è pari $\overset{def}{\iff}$ a_{ij} ha posto pari

$i+j$ è disp. $\overset{def}{\iff}$ a_{ij} ha posto dispari



quelli cerchiati hanno posto pari

es. calc. complem. algebrico

$$\begin{pmatrix} -1 & \boxed{0} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{2} \Rightarrow A_{(1,2)} = \sqrt{2}$$

1 calcolo il minore complementare

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

det A

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n}$$

$$a_{11} \cdot (A_{11}) + a_{12} \cdot (A_{12}) + \ldots + a_{1n} \cdot (A_{1,n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot A(1,i)$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 0} \\ 0 \quad 1 \quad -1 \\ -1 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix}$$

usando Laplace

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}$$

$$\det A = 1 - 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

VITAGLIANO

$\det A = 1(1-0) + 1(0-1) + 0(\ ) = 1-1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det A = ?$$

Con Sarrus

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{matrix} \Rightarrow \det A = 0 - 2 \, 0 - 0 - 0 + 2\sqrt{2} = +2\sqrt{2} - 2$$

con Laplace

$-\sqrt{2}(-2+\sqrt{2}) = +2\sqrt{2} - 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a & a_{1n} \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \; 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det A = a_{11} A(1,1) \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$

$A(1,1) = a_{22}($

VITTAGLIANO

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2(-2)\cdot 0\cdot 8\cdot 10 = 0$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

← matrice diagonale
tutti i valori sono zero tranne quelli sulla diag. principale

$$\det A = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\text{trasf I, II specie}"] \arrow[d] & & A' \\ A_1 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & A_3 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

- supp. che queste trasf. sono di prima specie ~~non~~ avrò nessuna variaz. sul det.
- supp. invece che ci siano anche trasf. di seconda specie; contando solo quelle di II specie, avrò un det con lo stesso segno se sono pari e segno opposto se sono dispari.

es. 1

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\left[-\det\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right]$$

---

riducendo a gradini la matrice

$$\xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{V}-\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & +1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}+\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 0$$

perchè sono combinazione lineare

VITAGLIANO

Teorema di Binet

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Matrici invertibili

A è invert. $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists B \in M_n(\mathbb{K}) \quad BA = AB = \mathbb{1}_n \quad B = A^{-1}$

Teorema A è invertibile $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

dim. solo $\Rightarrow$

supp. A inv.

$$\Rightarrow \exists A^{-1} \quad A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n \Rightarrow \underbrace{\det(A A^{-1})}_{= \det A \det A^{-1}} = \underbrace{\det \mathbb{1}_n}_{\neq 1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & \\ \vdots & & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A \neq 0$$

$$B = \begin{pmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \cdots & A(1,n) \\ A(2,1) & & & \\ \vdots & & & \\ A(n,1) & A(n,2) & & A(n,n) \end{pmatrix} \overset{def.}{=} \hat{A}$$

a cappello

composto dai complementi algebrici della matrice A in quel posto

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}^t$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A(1,1)}{\det A} & \frac{A(2,1)}{\det A} & \cdots & \frac{A(n,1)}{\det A} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{A(1,n)}{\det A} & \frac{A(2,n)}{\det A} & & \frac{A(n,n)}{\det A} \end{pmatrix}$$

VITAGLIANO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1/2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1(-2) - \sqrt{2}\left(\sqrt{2}/2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 - 0 = -2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ è invertibile}$$

$\Downarrow$

posso calcolare la reciproca

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\sqrt{2} \\ +1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}^t}{\det A} = \begin{pmatrix} +1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

come prova si può fare $\boxed{A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n}$

$A^{-1} \cdot A$ //

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1+1 & \end{pmatrix}$$

VITAGLIANO

Esercizi

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$A+B=$
$A+C=$
$AB=$
$AC=$?

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & -1+2 & 0+3 \\ 2-1 & 3-2 & 0+0 & -1-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$A+C=$ NON SI PUÒ CALCOLARE

$AB=$ non si può calcolare

$$AC=\begin{pmatrix} (1\cdot 0)+(2\cdot 0)+(-1\cdot 1)+[0\cdot(-1)] & (1\cdot 0)+(2\cdot 1)+(-1\cdot 1)+[0\cdot(-1)] & (1\cdot 1)+(2\cdot 0)+(-1\cdot 0)+[0\cdot(-1)] \\ (2\cdot 0)+(3\cdot 0)+(0\cdot 1)+[-1\cdot(-1)] & (2\cdot 0)+(3\cdot 1)+(0\cdot 1)+[-1\cdot(-1)] & (2\cdot 1)+(3\cdot 0)(\cdot 0 0)+[-1(-1)] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

AULA F5 DALLE 15:00 ALLE 17:00
LUN. 31/10/11 TUTORATO CON STEFANIA BOFFA