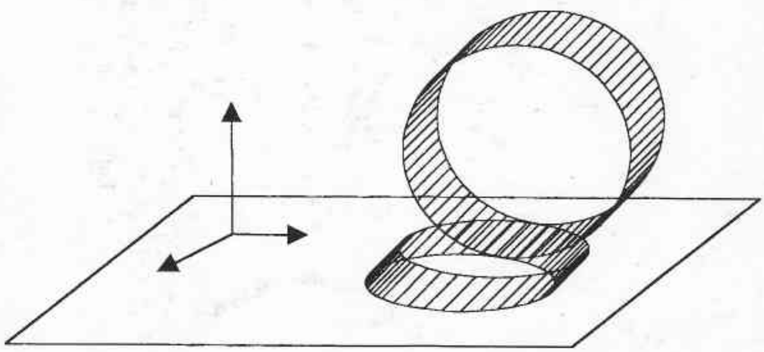
E.DI.S.U. NAPOLI 1

ENTE REGIONALE PER IL DIRITTO ALLO STUDIO UNIVERSITARIO

COLLANA PUBBLICAZIONI DIDATTICHE

PAOLA BIONDI - PIA MARIA LO RE

APPUNTI DI GEOMETRIA



E.DI.S.U. NAPOLI 1

Luglio 2004

Prefazione

Questi appunti sono relativi ai corsi di Geometria (laurea triennale in Informatica) e Geometria I (laurea triennale in Fisica) da noi tenuti nell'anno accademico 2002/2003. Essi non sono stati pensati come testo di riferimento, bensì come supporto alle lezioni svolte in aula e guida per lo studente che dovrà integrarli con la consultazione dei testi consigliati e con il colloquio diretto con i docenti.

INDICE

CAPITOLO I

MATRICI E SISTEMI LINEARI

1. VETTORI NUMERICI

Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. L'insieme $\mathbb{R}$ dotato delle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione sarà detto *campo reale*. Il campo reale sarà indicato ancora con $\mathbb{R}$.

Consideriamo il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ n volte per se stesso, cioè l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-ple ordinate di numeri reali. Un elemento di tale insieme sarà detto *vettore numerico* di ordine n sul campo $\mathbb{R}$.

Presi due vettori numerici $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ di $\mathbb{R}^n$, diremo *somma* di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ il vettore numerico $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \ldots , a_n + b_n)$. Preso un vettore numerico $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ed un numero reale h, diremo *prodotto* di h per $\mathbf{a}$ il vettore numerico $h\,\mathbf{a} = (ha_1, \ldots, ha_n)$.

Presi due vettori numerici $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ di $\mathbb{R}^n$, diremo *prodotto scalare standard* di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, il numero reale $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$.

E' facile verificare che il prodotto scalare standard così definito soddisfa le seguenti proprietà :

$\forall\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \quad$ e $\quad \forall\ h, k \in \mathbb{R}$

simmetria : $\quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}$,

bilinearità : $\quad (h\,\mathbf{a} + k\,\mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = h\,(\mathbf{a} \bullet \mathbf{c}) + k\,(\mathbf{b} \bullet \mathbf{c})$,

$\quad \mathbf{a} \bullet (h\,\mathbf{b} + k\,\mathbf{c}) = h\,(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) + k\,(\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})$.

Esso è inoltre *definito positivo*, cioè :

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = (0, 0, \ldots, 0).$$

2. MATRICI

Siano m ed n due interi positivi. Si dice *matrice di tipo* [m, n] (o **matrice m × n)** sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali ogni tabella del tipo

$$(2.1) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.

Scriveremo in forma abbreviata $(a_{ij})_{i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}}$ (o semplicemente (a_{ij})). L'insieme delle matrici di tipo [m, n] su $\mathbb{R}$ sarà indicato nel seguito con $\mathbb{R}_{m,n}$.

Sia A la matrice (2.1). Il vettore numerico $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ è detto la i-ma *riga* di A e il vettore numerico $\mathbf{a}^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ è detto la j-ma *colonna* di A. L'elemento a_{ij} è detto elemento di posto (i, j) di A.

Si dice *trasposta* di A, e si indica con A_t o con A^t, la matrice di tipo [n, m] ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.

ESEMPI

2.1. Considerate le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 8 & -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, si ha :

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se $m = n$, la matrice si dice *quadrata di ordine* n. In tal caso la n-pla ordinata $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ è detta *diagonale principale* di A, mentre la n-pla ordinata $(a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1})$ è detta *diagonale secondaria* di A.

Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici di tipo $[m, n]$ su $\mathbb{R}$. Si dice *somma* di A e B, e si indica con $A + B$, la matrice $(a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}_{m,n}$. Se h è un numero reale e $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{m,n}$, si dice *prodotto* di h per A, e si denota con hA, la matrice $(ha_{ij}) \in \mathbb{R}_{m,n}$.

Siano $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}_{n,q}$. Si dice *prodotto (righe per colonne)* di A per B, e si indica con AB, la matrice di tipo $[m, q]$ che ha per elemento di posto (i, j) il prodotto scalare standard della i-ma riga di A per la j-ma colonna di B :

$$AB = (\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{b}^j) \in \mathbb{R}_{m,q}.$$

ESEMPI

2.2. Considerate le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 8 & -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, è

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{b}^1 & \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{b}^1 & \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{a}_3 \bullet \mathbf{b}^1 & \mathbf{a}_3 \bullet \mathbf{b}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 3 \\ 23 & 7 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto righe per colonne tra matrici ora definito gode delle seguenti proprietà :

(2.2) $A(B + C) = AB + AC$, $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}$ e $\forall B, C \in \mathbb{R}_{n,q}$;

$(A + B)C = AC + BC$, $\forall A, B \in \mathbb{R}_{m,n}$ e $\forall C \in \mathbb{R}_{n,q}$.

(2.3) $A(hB) = h(AB) = (hA)B$, $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $\forall B \in \mathbb{R}_{n,q}$ e $\forall h \in \mathbb{R}$.

(2.4) $A(BC) = (AB)C$, $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $\forall B \in \mathbb{R}_{n,q}$ e $\forall C \in \mathbb{R}_{q,s}$.

Una matrice si dice *a gradini* se il numero degli zeri che precedono il primo elemento diverso da zero in ogni riga aumenta di riga in riga, fino ad avere eventuali righe costituite da soli zeri. Il primo elemento diverso da zero in ciascuna riga è detto *pivot*. Osserviamo esplicitamente che in una matrice a gradini priva di righe nulle, il numero delle righe non supera il numero delle colonne.

ESEMPI

2.3. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sono a gradini.

I pivot della matrice A sono 1, 2, 2 ; quelli della matrice B sono -3 e 4 ; quelli di C sono 1, 7, 4.

Si dicono *operazioni elementari* (di riga) sulla matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

le seguenti operazioni sulle righe :

$\mathbf{E_1}$: scambio di due righe ($\mathbf{a}_i \leftrightarrow \mathbf{a}_j$)

$\mathbf{E_2}$: moltiplicazione di una riga per un numero reale h non nullo ($h\,\mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{a}_i$);

$\mathbf{E_3}$: sostituzione di una riga con il vettore numerico ottenuto sommando la riga stessa con un'altra riga ($\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \rightarrow \mathbf{a}_j$).

La combinazione delle operazioni $\mathbf{E}_2$ ed $\mathbf{E}_3$ dà luogo alla seguente operazione :

sostituzione di una riga con il vettore numerico ottenuto ottenuto sommando la riga stessa con un'altra moltiplicata per un numero reale h non nullo ($h\,\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \rightarrow \mathbf{a}_j$).

Ogni matrice ottenuta da una matrice A mediante operazioni elementari (di riga) si dice *equivalente* (per righe) ad A.

Si vede facilmente che :

Proposizione 2.1. *Per ogni matrice esiste una matrice a gradini ad essa equivalente.*

ESEMPI

2.4. Determiniamo una matrice a gradini equivalente alla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'operazione $-2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2$ dà luogo alla matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ da cui,

mediante l'operazione $3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 \rightarrow \mathbf{b}_3$ si ottiene la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Da C mediante l'operazione $\frac{1}{3}\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \rightarrow \mathbf{c}_3$ si ottiene la matrice a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

2.5. Determiniamo una matrice a gradini equivalente alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'operazione $\mathbf{a}_1 \leftrightarrow \mathbf{a}_3$ dà luogo alla matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

da cui si ottiene, mediante l'operazione $-\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_4 \to \mathbf{b}_4$, la matrice
$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. L'operazione $-\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \to \mathbf{c}_3$ fornisce la matrice

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ da cui, mediante l'operazione $\mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_4 \to \mathbf{d}_4$, si ottiene la

matrice a gradini $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. SISTEMI LINEARI

Si dice *equazione lineare* sul campo reale $\mathbb{R}$ nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ogni equazione del tipo

(3.1)
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

Per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, a_i è detto *coefficiente* dell'incognita x_i ; b prende il nome di *termine noto* dell'equazione.

Consideriamo ora m ($m \geq 1$) equazioni lineari su $\mathbb{R}$ nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ovvero, come si suol dire, un *sistema lineare* su $\mathbb{R}$ di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

(3.2)
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}.$$

Si dice *soluzione* del sistema (3.2) ogni n-pla ordinata $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ di numeri reali tale che :

(3.3)
$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n = b_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mn} y_n = b_m \end{cases}.$$

Se $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ è una soluzione del sistema (3.2), y_i è detto il valore che l'incognita x_i assume nella soluzione $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Un sistema si dice *compatibile* se ammette almeno una soluzione, *incompatibile* in caso contrario. Un sistema compatibile che ammette una sola soluzione è detto *determinato*. Un sistema compatibile che non sia determinato è detto *indeterminato*.

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ è detta *matrice dei coefficienti* (delle incognite) o *matrice incompleta* del sistema. La matrice **A'** = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ è detta *matrice completa* del sistema. Se tale matrice è a gradini, il sistema è detto *a gradini.*

Due sistemi lineari nelle stesse incognite si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Proviamo che:

Proposizione 3.1. *Sia* $S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ *un sistema lineare. Ogni sistema S' la cui matrice completa è equivalente alla matrice completa di S è equivalente ad S.*

Dimostrazione. Le operazioni elementari $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$ (cfr. Par. 2) sulle righe della matrice completa del sistema S corrispondono in modo ovvio ad analoghe operazioni sulle equazioni del sistema.

Se S' è stato ottenuto da S mediante lo scambio di due equazioni, è ovvio che S' è equivalente ad S.

Supponiamo ora S' ottenuto da S moltiplicando una equazione, ad es. la prima, per un numero reale $h \neq 0$. Poiché le equazioni $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ e $ha_{11}x_1 + ha_{12}x_2 + \dots + ha_{1n}x_n = hb_1$ hanno le stesse soluzioni, S ed S' sono equivalenti.

Supponiamo infine S' ottenuto da S sostituendo ad un'equazione la somma dell'equazione stessa e di un'altra, ad esempio sostituendo alla prima equazione la somma della prima e della seconda . Se $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ è soluzione di S, allora $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ è anche soluzione dell'equazione $(a_{11} + a_{21})\, x_1 + (a_{12} + a_{22})\, x_2 + \ldots + (a_{1n} + a_{2n})\, x_n = b_1 + b_2$ e dunque del sistema S'. Viceversa, se $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ è soluzione di S', allora $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ è anche soluzione dell'equazione $a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$ ottenuta facendo la differenza tra la prima e la seconda equazione di S'. I sistemi S ed S' sono dunque equivalenti.

Dalle Proposizioni 2.1 e 3.1 segue subito che :

Proposizione 3.2. *Per ogni sistema lineare esiste un sistema a gradini ad esso equivalente.*

Dato un sistema lineare, si pone il problema di determinarne le eventuali soluzioni.

Consideriamo in primo luogo il caso di un sistema costituito da una sola equazione, sia essa

(3.4) $$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \ldots + a_n\, x_n = b.$$

Sia $n = 1$. L'equazione (3.4) è allora del tipo $a\, x = b$.

Se $a = b = 0$, ogni numero reale è soluzione dell'equazione e in tal caso l'equazione si dice *identica*. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione non ammette soluzioni ovvero è incompatibile (l'insieme delle soluzioni è vuoto). Se $a \neq 0$, l'equazione ammette una e una sola soluzione (è determinata) e tale soluzione è il numero $a^{-1}\, b$.

Sia ora $n \geq 2$.

Se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = b = 0$, ogni elemento di $\mathbb{R}^n$ è soluzione dell'equazione (3.4) che in tal caso è detta *identica*. Se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione (3.4) non ammette soluzioni ed è dunque incompatibile. Se almeno uno dei coefficienti delle incognite è diverso da zero, sia esso a_1, scriviamo l'equazione nella forma

(3.5) $$a_1 x_1 = b - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n .$$

Dire che $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ è soluzione di (3.4) (cioè di (3.5)) significa dire che y_1 è soluzione dell'equazione

(3.6) $$a_1 x_1 = b - a_2 y_2 - \dots - a_n y_n$$

nell'incognita x_1 e tale equazione è determinata, essendo $a_1 \neq 0$. Ne segue che, comunque si scelgono n-1 numeri reali $h_2, \dots, h_n$, esiste una e una sola soluzione dell'equazione (3.5), ovvero della (3.4), in cui, per ogni $i = 2, \dots, n$, l'incognita x_i assume il valore h_i. E' facile rendersi conto che, facendo variare $h_2, \dots, h_n$ in $\mathbb{R}$, otteniamo con il procedimento precedente tutte le soluzioni dell'equazione (3.4).

Consideriamo ora un sistema lineare S con almeno due equazioni. Per la Proposizione 3.2 esiste un sistema a gradini equivalente ad S. Per determinare le (eventuali) soluzioni di S basta allora saper determinare le (eventuali) soluzioni di un sistema a gradini. Occupiamoci dunque dei sistemi a gradini.

Sia S un sistema a gradini. Se la matrice completa ha righe nulle, le corrispondenti equazioni si possono eliminare in quanto sono identiche. Indichiamo con p ($\leq m$) il numero delle equazioni ottenute eliminando da S le eventuali equazioni identiche (*tale numero coincide ovviamente col numero dei pivot della matrice completa*). Se la matrice incompleta del nuovo sistema S' ha una riga nulla, il sistema S è incompatibile in quanto la corrispondente equazione è incompatibile. Osserviamo che *in questo caso il numero dei pivot della matrice incompleta è di uno inferiore al numero dei pivot della matrice completa*. Supponiamo dunque che la matrice incompleta di S' non abbia righe nulle.

Si possono presentare i seguenti due casi : (i) $p = n$; (ii) $p < n$.

Caso (i). Il sistema è del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \quad \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \dots \quad \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \dots \\ \quad a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n = b_{n-1} \\ \quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

con $a_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Dire che $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ è soluzione del sistema significa dire che :

y_n è soluzione dell'equazione $a_{nn}x_n = b_n$

y_{n-1} è soluzione dell'equazione $a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}y_n = b_{n-1}$

...

y_1 è soluzione dell'equazione $a_{11}x_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = b_1$.

Ciascuna di queste n equazioni in una sola incognita ammette una ed una sola soluzione. Ne segue che il sistema ammette una ad una sola soluzione che si ottiene risolvendo le equazioni del sistema cominciando dall'ultima e sostituendo di volta in volta i valori trovati nelle equazioni precedenti.

Caso (ii). In ciascuna equazione portiamo a secondo membro i termini contenenti le incognite, dette *variabili libere*, i cui coefficienti non compaiono tra i pivot della matrice incompleta del sistema. Per semplicità, supponiamo che tali incognite siano $x_{p+1}, \dots, x_n$. Il sistema si presenta allora nella forma :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \quad \dots \quad + a_{1p}x_p = b_1 - a_{1\,p+1}x_{p+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ \quad a_{p-1\,p-1}x_{p-1} + a_{p-1\,p}x_p = b_{n-1} - a_{p-1\,p+1}x_{p+1} - \dots - a_{p-1\,n}x_n \\ \quad a_{pp}x_p = b_p - a_{p\,p+1}x_{p+1} - \dots - a_{pn}x_n \end{cases}$$

Comunque si scelgono n-p elementi $h_{p+1}, \ldots, h_n$ in $\mathbb{R}$, per il caso (i) esiste una ed una sola soluzione del sistema in cui le variabili libere $x_{p+1}, \ldots, x_n$ assumono rispettivamente i valori $h_{p+1}, \ldots, h_n$. Il sistema dato ammette quindi <u>infinite soluzioni</u> che dipendono da n-p parametri e tali soluzioni possono essere determinate nel modo visto.

ESEMPI

3.1. $$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}.$$

La matrice completa di tale sistema è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. Una matrice a gradini ad essa equivalente è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ne segue che un sistema a gradini equivalente ad S è $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \quad 2x_2 - x_3 = 3 \\ \qquad 2x_3 = 1 \end{cases}$. Tale sistema è determinato e la sua soluzione è (9/4, 7/4, 1/2).

3.2. $$S : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

La matrice completa di tale sistema è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Una matrice a gradini ad essa equivalente è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e quindi un sistema a gradini equivalente ad S è $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 0x_4 = 2 \end{cases}$, che risulta incompatibile.

3.3. $S : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$.

La matrice completa di tale sistema è $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Una matrice a gradini ad essa equivalente è $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e quindi un sistema a gradini equivalente ad S è $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$. Le incognite che hanno i pivot come coefficienti sono x_1, x_3 e x_4; ne segue che la x_2 è l'unica incognita a cui si può attribuire un valore arbitrario h. Scritto allora il sistema nella forma $\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 1 + x_2 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$ si ha che l'insieme delle soluzioni del sistema è

$\{ (h/2 + 3, h, -2, 3) , h \in \mathbb{R} \}$.

3.4. $S : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

La matrice completa di tale sistema è $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Una matrice a gradini ad essa equivalente è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi un sistema a gradini equivalente ad S è $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_3 + x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$. Le incognite che hanno i pivot come coefficienti sono x_1 e x_3; ne segue che x_2, x_4 e x_5 sono le incognite cui si possono attribuire i valori arbitrari h_2, h_4 e h_5 rispettivamente. Scritto allora il sistema nella forma $\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 - x_2 + x_4 \\ -x_3 = -3 - x_4 - x_5 \end{cases}$ si ha che l'insieme delle soluzioni del sistema è $\{ (-1-h_2-h_5,\ h_2,\ 3+h_4+h_5,\ h_4,\ h_5),\ h_2, h_4, h_5 \in \mathbb{R} \}$.

Un sistema lineare S si dice *omogeneo* se tutte le sue equazioni hanno il termine noto uguale a zero.

Sia S un sistema omogeneo in n incognite. Poiché la n-pla $(0, 0, \ldots, 0)$ è evidentemente una soluzione di S, allora S è sicuramente compatibile. La soluzione $(0, 0, \ldots, 0)$ è detta *soluzione nulla* o *banale* di S. Per quanto precedentemente visto, si possono presentare per S solo le seguenti due eventualità:

(i) S è determinato e in questo caso l'unica soluzione di S è ovviamente quella banale;

(ii) S è indeterminato ed ammette quindi infinite soluzioni.

Utilizzando il prodotto (righe per colonne) tra matrici, introdurremo ora per i sistemi lineari una notazione matriciale che risulterà molto utile nel seguito. A tal proposito, considerato il sistema (3.2), poniamo $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$. Dire che $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ è soluzione del sistema (3.2) significa che valgono le uguaglianze espresse dalla (3.3); tali uguaglianze equivalgono alla seguente uguaglianza tra matrici : $AY = B$, avendo posto $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$. Appare perciò naturale scrivere il sistema (3.2) nella forma

$$AX = B, \tag{3.7}$$

dove X denota una matrice incognita $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$.

Se il sistema (3.2) è omogeneo, la (3.7) diventa $AX = 0$, avendo indicato con 0 la matrice di tipo [m, 1] che ha tutti gli elementi uguali a zero.

CAPITOLO II

SPAZI VETTORIALI

1. OPERAZIONI INTERNE ED ESTERNE AD UN INSIEME

Sia S un insieme non vuoto. Si definisce *operazione interna* ad S ogni applicazione $\perp : S \times S \to S$.

Sia $(a, b) \in S \times S$. L'immagine mediante $\perp$ di (a, b) si indica di solito con $a \perp b$.

ESEMPI

1.1. Le ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri naturali sono operazioni interne all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Analogamente, le ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri interi, razionali o reali, sono operazioni interne agli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ (dei numeri interi, razionali o reali).

1. 2. Sia S un insieme non vuoto. Indicato con $\mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti di S, le applicazioni

$\cap : (X, Y) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \to X \cap Y \in \mathcal{P}(S)$ e

$\cup : (X, Y) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \to X \cup Y \in \mathcal{P}(S)$

sono operazioni interne a $\mathcal{P}(S)$.

1.3. L'applicazione $\wedge : (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to m^n \in \mathbb{N}$ è una operazione interna ad $\mathbb{N}$.

1.4. Sia O un punto dello spazio della geometria elementare. Indichiamo con $\mathcal{S}_O$ l'insieme dei segmenti orientati dello spazio di primo estremo il punto O. Se OA ed OB sono due elementi di $\mathcal{S}_O$, chiamiamo *somma* di OA ed OB il segmento OC, dove il punto C è il secondo estremo del segmento di primo estremo A *equipollente* ad OB (cioè della stessa misura di OB rispetto ad una fissata unità e, se non nullo, parallelo e concorde ad OB).

L'applicazione $+ : (OA, OB) \in \mathcal{S}_O \times \mathcal{S}_O \rightarrow OC = OA + OB \in \mathcal{S}_O$ è una operazione interna ad $\mathcal{S}_O$.

Siano T ed S due insiemi non vuoti. Si definisce *operazione esterna* tra T ed S ogni applicazione $o : T \times S \rightarrow S$.

Sia $(a, b) \in T \times S$. L'immagine mediante o di (a, b) si indica di solito con $a \, o \, b$.

ESEMPI

1.5. Considerati gli insiemi $\mathbb{Z}$ ed $\mathbb{R}$, l'applicazione $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow a\,b \in \mathbb{R}$ è una operazione esterna tra $\mathbb{Z}$ ed $\mathbb{R}$.

1.6. Sia h un numero reale ed OA un elemento di $\mathcal{S}_O$. Se $h = 0$ oppure OA è il segmento nullo OO, chiamiamo *prodotto* di h per OA il segmento OB = OO. Se $h \neq 0$ ed $OA \neq OO$, chiamiamo *prodotto* di h per OA il segmento OB contenuto nella retta per O ed A, avente misura uguale alla misura di OA moltiplicata per il valore assoluto di h e concorde o discorde ad OA a seconda che sia $h > 0$ oppure $h < 0$. L'applicazione $\circ : (h, OA) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}_O \rightarrow OB = h \circ OA \in \mathcal{S}_O$ è una operazione esterna tra $\mathbb{R}$ ed $\mathcal{S}_O$.

2. SPAZI VETTORIALI SU $\mathbb{R}$

Sia V un insieme non vuoto, $+$ una operazione interna a V e $\circ$ una operazione esterna tra $\mathbb{R}$ e V. Si dice che la terna $(V, +, \circ)$ è uno *spazio vettoriale* sul campo reale $\mathbb{R}$ se sono verificate le seguenti proprietà :

(2.1) *associativa* : per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$, $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{z} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{z})$;

(2.2) *esistenza dell'elemento neutro* : esiste $\mathbf{v}_0 \in V$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{v}_0 = \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$, per ogni $\mathbf{v} \in V$;

(2.3) *esistenza dell'opposto* : per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste $\mathbf{v}' \in V$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{v}$;

(2.4) *commutativa* : per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$;

(2.5) per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v} \in V$, $(h k) \circ \mathbf{v} = h \circ (k \circ \mathbf{v})$;

(2.6) per ogni $\mathbf{v} \in V$, $1 \circ \mathbf{v} = \mathbf{v}$;

(2.7) *distributiva di* $\circ$ *rispetto all'addizione in* $\mathbb{R}$: per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v} \in V$, $(h + k) \circ \mathbf{v} = h \circ \mathbf{v} + k \circ \mathbf{v}$;

(2.8) *distributiva di* $\circ$ *rispetto a* $+$ *in* V : per ogni $h \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $h \circ (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = h \circ \mathbf{v} + h \circ \mathbf{w}$.

Se $(V, +, \circ)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, gli elementi di V si dicono *vettori* e gli elementi di $\mathbb{R}$ si dicono *scalari*. L'operazione $+$ è detta *addizione* tra vettori e l'operazione $\circ$ è detta *moltiplicazione* di uno scalare per un vettore. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono due vettori, il vettore $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è detto *somma* di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Se h è uno scalare e $\mathbf{v}$ è un vettore, il vettore $h \circ \mathbf{v}$ è detto *prodotto* di h per $\mathbf{v}$ e sarà denotato d'ora in poi semplicemente con $h\mathbf{v}$.

Proposizione 2.1. *Sia $(V, +, \circ)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si ha :*

(i) esiste in V un unico elemento neutro rispetto a $+$;

(ii) per ogni $\mathbf{v} \in V$, esiste in V un unico opposto di $\mathbf{v}$ rispetto a $+$.

Dimostrazione. (i) Siano $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{w}_0$ elementi neutri rispetto a + . Per la (2.2) si ha : $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_0$.

(ii) Sia $\mathbf{v} \in V$ e siano $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}''$ opposti di $\mathbf{v}$ rispetto a +. Per le (2.2) e (2.1) si ha : $\mathbf{v}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + (\mathbf{v} + \mathbf{v}'') = (\mathbf{v}' + \mathbf{v}) + \mathbf{v}'' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'' = \mathbf{v}''$.

L'elemento neutro rispetto a + in uno spazio vettoriale si dice *vettore nullo* e si indica con $\mathbf{0}_V$ o semplicemente con $\mathbf{0}$ quando non c'è possibilità di equivoco. Per ogni vettore $\mathbf{v}$ di V, l'opposto di $\mathbf{v}$ si indica con $-\mathbf{v}$; evidentemente, $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Nel seguito, dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, scriveremo $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ invece di $\mathbf{v} + (-\mathbf{w})$.

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI SU $\mathbb{R}$

2.1. *Spazio vettoriale numerico di ordine n su* $\mathbb{R}$:

E' facile verificare che l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-ple ordinate di numeri reali con l'operazione + che a due vettori numerici $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ associa il vettore numerico $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$ e l'operazione $\circ$ che ad un numero reale h e ad un vettore numerico $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ associa il vettore numerico $\mathbf{ha} = (ha_1, \ldots, ha_n)$ (cfr. Cap. I, Par. 1) è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Il vettore nullo di tale spazio è la n-pla $(0, 0, \ldots, 0)$ e, per ogni vettore $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, l'opposto di $\mathbf{a}$ è il vettore $-\mathbf{a} = (-a_1, \ldots, -a_n)$.

Osserviamo che, per n = 1, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ e le operazioni + e $\circ$ non sono altro che le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri reali. Il campo dei numeri reali è dunque spazio vettoriale su se stesso.

2.2. *Spazio vettoriale delle matrici di tipo* [m, n] *su* $\mathbb{R}$:

Indichiamo con $\mathbb{R}_{m,n}$ l'insieme delle matrici di tipo [m, n] su $\mathbb{R}$ (cfr. Cap. I, Par. 2). Consideriamo l'operazione + che a due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ di $\mathbb{R}_{m,n}$ associa la matrice $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}_{m,n}$ e l'operazione $\circ$ che ad un numero reale h e ad una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{m,n}$ associa la matrice $hA = (ha_{ij}) \in \mathbb{R}_{m,n}$. Si verifica facilmente che la terna $(\mathbb{R}_{m,n}, +, \circ)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ in cui il vettore nullo è la matrice con tutti gli elementi uguali a 0, detta *matrice nulla* (di tipo [m, n]); per ogni matrice $A = (a_{ij})$, l'opposta è la matrice $-A = (-a_{ij})$.

2.3. *Spazio vettoriale dei vettori geometrici applicati in un punto* :

Sia O un punto dello spazio della geometria elementare. Si dimostra (utilizzando i teoremi della geometria elementare) che l'insieme $\mathcal{S}_O$ dei segmenti orientati dello spazio di primo estremo O con le operazioni + e $\circ$ definite come negli Esempi 1.4 e 1.6 è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ che indicheremo con $\mathcal{V}_O$. Gli elementi di tale spazio vettoriale saranno anche detti *vettori geometrici applicati in* O.

Il vettore nullo di $\mathcal{V}_O$ è il segmento nullo OO e, per ogni vettore non nullo OA, l'opposto di OA è il vettore OA', dove il punto A' appartiene alla retta per O ed A, ha la stessa misura di OA (rispetto ad una fissata unità) e verso opposto a quello di OA.

2.4. *Spazio vettoriale dei vettori geometrici liberi (o vettori liberi ordinari)* :

Indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme dei segmenti orientati dello spazio della geometria elementare. Se $AB \in \mathcal{S}$, si dice *vettore geometrico libero* (o *vettore libero ordinario*) individuato da AB l'insieme, che indicheremo con **AB**, dei segmenti orientati dello spazio equipollenti ad AB (cfr. Esempio 1.4). Evidentemente, se $CD \in \mathbf{AB}$, risulta $\mathbf{CD} = \mathbf{AB}$. Osserviamo esplicitamente che l'insieme dei segmenti nulli dello spazio è un vettore geometrico libero, detto *vettore libero nullo*, che indicheremo con **0**.

Sia **a** = **AB** un vettore geometrico libero ed O un punto. L'unico segmento orientato OP tale che **OP** = **a** è detto vettore **AB** *applicato in* O o *rappresentante* di **AB** in O.

Siano **a** e **b** due vettori liberi. Fissato un punto O dello spazio, siano OP ed OQ i rappresentanti in O dei vettori **a** e **b** e sia OR = OP + OQ. Si prova (utilizzando i teoremi della geometria elementare) che, se O' è un punto distinto da O e O'P' e O'Q' sono i rappresentanti in O' di **a** e **b**, il segmento O'R' = O'P' + O'Q' è equipollente ad OR. Ne segue che i vettori liberi **OR** ed **O'R'** coincidono. Il vettore libero **OR** = **O'R'** sarà detto *somma* di **a** e **b** e sarà indicato con **a** + **b** .

Sia **a** un vettore libero ed h un numero reale. Fissato un punto O dello spazio, sia OP il rappresentante di **a** in O e sia OQ = h OP. Se O' è un punto distinto da O ed O'P' è il rappresentante di **a** in O', il segmento O'Q' = h O'P' risulta equipollente ad OQ, per cui è **OQ** = **O'Q'**. Il vettore libero **OQ** = **O'Q'** sarà detto prodotto di h per **a** e sarà indicato con h **a**.

Si verifica che l'insieme dei vettori liberi dello spazio con l'operazione + che a due vettori liberi **a** e **b** associa il vettore libero **a** + **b** e l'operazione $\circ$ che ad un numero reale h e ad un vettore libero **a** associa il vettore libero h **a** è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Indicheremo con $\mathcal{V}$ tale spazio vettoriale. Il vettore nullo di $\mathcal{V}$ coincide ovviamente con **0**.

2.5. *Spazio vettoriale dei vettori geometrici liberi di un piano* :

Sia π un piano ed $\mathcal{S}_\pi$ l'insieme dei segmenti orientati contenuti in π. Se AB $\in \mathcal{S}_\pi$, si dice *vettore geometrico libero* (o *vettore libero ordinario*) *di* π individuato da AB l'insieme, che indicheremo con **AB**, dei segmenti orientati del piano π equipollenti ad AB. Definiamo la somma di due vettori liberi di π e il prodotto di un numero reale per un vettore libero di π analogamente a quanto fatto nell'Esempio 2.4 per i vettori liberi dello spazio. L'insieme $\mathcal{S}_\pi$ con le due operazioni così definite è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Indicheremo tale spazio con $\mathcal{V}_\pi$.

2.6. *Spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali.*

Indichiamo con $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi nella indeterminata x a coefficienti reali. L'insieme $\mathbb{R}[x]$, con le ordinarie operazioni di addizione tra polinomi e moltiplicazione di un numero reale per un polinomio, è uno spazio vettoriale sul campo reale $\mathbb{R}$. Il vettore nullo di tale spazio vettoriale è il polinomio in x avente tutti i coefficienti uguali a zero (*polinomio nullo*).

Nel seguito scriveremo di solito semplicemente V in luogo di (V, +, ∘) e non menzioneremo il campo $\mathbb{R}$.

Proviamo ora alcune proprietà di uno spazio vettoriale V.

Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$, si ha :

I. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{z} - \mathbf{w}$.

Dimostrazione. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{z} \Rightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{w} = \mathbf{z} - \mathbf{w} \Rightarrow$ (per la (2.1)) $\mathbf{v} + (\mathbf{w} - \mathbf{w}) = \mathbf{z} - \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{z} - \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{z} - \mathbf{w}$.

In particolare, dalla I segue che : $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

II. $0\,\mathbf{v} = \mathbf{0} = h\,\mathbf{0}$.

Dimostrazione. $0\,\mathbf{v} = (0+0)\,\mathbf{v} \Rightarrow$ (per la (2.7)) $0\,\mathbf{v} = 0\,\mathbf{v} + 0\,\mathbf{v} \Rightarrow$ (per la I) $0\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$h\,\mathbf{0} = h\,(\mathbf{0} + \mathbf{0}) \Rightarrow$ (per la (2.8)) $h\,\mathbf{0} = h\,\mathbf{0} + h\,\mathbf{0} \Rightarrow$ (per la I) $h\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

III. $h\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad h = 0$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Se $h = 0$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dalla II segue che $h\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Sia ora $h\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se $h \neq 0$, esiste l'inverso h^{-1} e si ha : $h\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow h^{-1}(h\,\mathbf{v}) = h^{-1}\mathbf{0} \Rightarrow$ (per la (2.5) e per la II) $(h^{-1}h)\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow 1\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow$ (per la (2.6)) $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

IV. $h(-\mathbf{v}) = -(h\,\mathbf{v}) = (-h)\,\mathbf{v}$.

Dimostrazione. Per provare che $h(-\mathbf{v})$ è l'opposto di $h\,\mathbf{v}$, basta provare che $h(-\mathbf{v}) + h\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Si ha : $h(-\mathbf{v}) + h\,\mathbf{v} =$ (per la (2.8)) $h(-\mathbf{v} + \mathbf{v}) = h\,\mathbf{0} =$ (per la II) $\mathbf{0}$. In maniera analoga si prova che $(-h)\,\mathbf{v} = -(h\,\mathbf{v})$.

In particolare, dalla IV segue che : $(-1)\,\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ e $(-h)(-\mathbf{v}) = h\,\mathbf{v}$.

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ sono t (≥ 3) vettori di V, il vettore $(\ldots((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)+\mathbf{v}_3)+\ldots)+\mathbf{v}_t$ sarà detto *somma* dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ e sarà indicato semplicemente con $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_t$.

Sfruttando le proprietà (2.1) e (2.4) si può provare che una somma di vettori non dipende né dall'ordine in cui si considerano i vettori, né dal modo di associarli. Si può inoltre provare che la proprietà distributiva (2.8) si può estendere alla somma di più vettori :

$$h(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_t) = h\,\mathbf{v}_1 + h\,\mathbf{v}_2 + \ldots + h\,\mathbf{v}_t\,.$$

Chiudiamo il presente paragrafo dando la seguente definizione :

se $h_1, h_2, \ldots, h_t \in \mathbb{R}$, il vettore $\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t$ è detto *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ mediante gli scalari $h_1, h_2, \ldots, h_t$. In particolare, se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori non nulli tali che $\mathbf{v} = h\,\mathbf{w}$ (e quindi $\mathbf{w} = h^{-1}\mathbf{v}$), si dirà che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono *proporzionali*.

3. SOTTOSPAZI

Sia $(V, +, \circ)$ uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme non vuoto H di V si dice *stabile* (o *chiuso*) rispetto all'addizione se

(3.1) per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$, si ha $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$;

si dice *stabile* (o *chiuso*) rispetto alla moltiplicazione per uno scalare se

(3.2) per ogni $h \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v} \in H$, si ha $h\,\mathbf{v} \in H$.

Osserviamo che, se H è un sottoinsieme stabile rispetto a $+$ e $\circ$, allora le applicazioni

(3.3) $$+ : (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in H \times H \to \mathbf{v} + \mathbf{w} \in H \quad \text{e} \quad \circ : (h, \mathbf{v}) \in \mathbb{R} \times H \to h\,\mathbf{v} \in H$$

sono rispettivamente una operazione interna definita in H ed una operazione esterna tra $\mathbb{R}$ ed H.

Sia H un sottoinsieme stabile rispetto a $+$ e $\circ$. Diremo che H è *sottospazio (vettoriale)* di V se H è esso stesso spazio vettoriale rispetto alle operazioni (3.3).

Proposizione 3.1. *Ogni sottoinsieme H di V stabile rispetto alle due operazioni di V è un sottospazio.*

Dimostrazione. Le proprietà (2.1), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8) sono ovviamente verificate. Consideriamo un vettore $\mathbf{v}$ di H. Per la (3.2), $0\,\mathbf{v} \in H$. D'altra parte, per la II del Paragrafo 2, $0\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, e quindi $\mathbf{0} \in H$. Inoltre, per la (3.2) e per la IV del Paragrafo 2, per ogni $\mathbf{v} \in H$, $(-1)\,\mathbf{v} = -\mathbf{v} \in H$. Resta così provato che valgono anche le (2.2) e (2.3) e dunque H è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni (3.3).

ESEMPI

3.1. In ogni spazio vettoriale V, i sottoinsiemi $\{\mathbf{0}\}$ e V sono evidentemente sottospazi di V, detti *sottospazi banali.*

3.2. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, consideriamo i sottoinsiemi :

$H_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \} = \{ (x, 0, z) , \text{con } x, z \in \mathbb{R} \}$;

$H_2 = \{ (x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \}$;

$H_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \}$.

Come facilmente si verifica, H_1 e H_2 sono sottoinsiemi stabili di $\mathbb{R}^3$, e dunque sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Il sottoinsieme H_3 è stabile rispetto all'operazione di addizione (come subito si verifica). Proviamo che H_3 non è stabile rispetto alla moltiplicazione per un numero reale, e quindi non è sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Moltiplicando infatti un numero reale $h < 0$ per un vettore (x, y, z) di H_3 avente $x \neq 0$, si ottiene il vettore (hx, hy, hz) che non è in H_3, dato che risulta $h x < 0$.

3.3. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$, consideriamo i sottoinsiemi :

$H_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \}$;

$H_2 = \{ (0, 0), (1, 1), (-1, -1) \}$;

$H_3 = \{ (x, -x) , \text{con } x \in \mathbb{R} \}$.

I sottoinsiemi H_1 e H_2 non sono stabili rispetto a nessuna delle due operazioni di $\mathbb{R}^2$ e dunque non sono sottospazi (infatti, ad esempio, (2, 4) e (3, 9) sono in H_1, mentre $(2, 4) + (3, 9) = (5, 13) \notin H_1$ e $5(2, 4) = (10, 20) \notin H_1$. Analogamente, $(1, 1) + (1, 1) = (2, 2) \notin H_2$ e $2(1, 1) = (2, 2) \notin H_2$). E' facile invece provare che H_3 è sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

3.4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in x a coefficienti reali (cfr. Esempio 2.6), consideriamo il sottoinsieme $\mathbb{R}_2[x]$ costituito dai polinomi di grado ≤ 2 e dal polinomio nullo, cioè $\mathbb{R}_2[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \text{con } a_0 , a_1 , a_2 \in \mathbb{R} \}$. Siano $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ e $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ due elementi di $\mathbb{R}_2[x]$. Si ha : $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2) x^2$ e tale polinomio, se non è nullo, ha grado al più due. Il sottoinsieme $\mathbb{R}_2[x]$ è dunque stabile rispetto all'operazione di addizione in $\mathbb{R}[x]$. Analogamente si prova la stabilità di $\mathbb{R}_2[x]$ rispetto all'operazione di moltiplicazione per un numero reale, e dunque $\mathbb{R}_2[x]$ è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.

Più in generale, si prova che, per ogni intero positivo n, il sottoinsieme $\mathbb{R}_n[x]$ di $\mathbb{R}[x]$ costituito dai polinomi di grado $\leq$ n e dal polinomio nullo è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.

3.5. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ dei vettori geometrici applicati nel punto O (cfr. Esempio 2.3). Detta r una retta per O e π un piano per O, siano H_1 ed H_2 i seguenti sottoinsiemi :

$H_1 = \{ OP \in \mathcal{V}_O : P \in r \}$, $\quad H_2 = \{ OP \in \mathcal{V}_O : P \in \pi \}$.

Per come è stata definita l'operazione di addizione in $\mathcal{V}_O$, la somma di due vettori di H_1 è un segmento di origine O contenuto in r e la somma di due vettori di H_2 è un segmento di origine O contenuto nel piano π. Ne segue che H_1 ed H_2 sono sottoinsiemi di $\mathcal{V}_O$ stabili rispetto all'operazione di addizione in $\mathcal{V}_O$. Analogamente si prova la stabilità di H_1 ed H_2 rispetto all'operazione di moltiplicazione di un numero reale per un vettore. I sottoinsiemi H_1 ed H_2 sono dunque entrambi sottospazi di $\mathcal{V}_O$.

Considerata una retta s per O distinta da r, poniamo : $H_3 = \{ OP \in \mathcal{V}_O : P \in s \}$. Come si è visto per H_1, anche H_3 è un sottospazio di $\mathcal{V}_O$. Consideriamo ora il sottoinsieme :

$H = H_1 \cup H_3 = \{ OP \in \mathcal{V}_O : P \in r \cup s \}$.

Il sottoinsieme H è ovviamente stabile rispetto all'operazione di moltiplicazione di un numero reale per un vettore, mentre non è stabile rispetto all'addizione in quanto, se consideriamo un vettore OP non nullo in H_1 e un vettore OQ non nullo in H_2, il vettore $OR = OP + OQ$ non appartiene ad H dato che il punto R non si trova evidentemente né in r né in s. Ne segue che H non è sottospazio di $\mathcal{V}_O$.

Osservazione 3.1. Sia W un sottospazio vettoriale di V. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$ sono vettori di W, dalla (3.1) segue che il vettore $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_s$ appartiene a W. Se $h_1, h_2, \dots, h_s$ sono numeri reali, dalle (3.1) e (3.2) segue che la combinazione lineare $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_s\mathbf{v}_s$ appartiene a W.

Proviamo ora che :

Proposizione 3.2. *Se H e W sono due sottospazi di V, allora $H \cap W$ è un sottospazio di V.*

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{0} \in H$ e $\mathbf{0} \in W$, allora $H \cap W$ non è vuoto. Siano ora $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori di $H \cap W$. Poiché $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$, allora $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in H$, in quanto H è un sottospazio. Analogamente, poiché $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$, allora $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$. Si ha quindi che $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in H \cap W$. Sia ora $h \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in H \cap W$. Poiché sia H che W sono sottospazi, allora il vettore $h\mathbf{v}$ appartiene sia ad H che a W, e quindi $h\mathbf{v} \in H \cap W$. Il sottoinsieme $H \cap W$ è dunque stabile rispetto ad entrambe le operazioni di V e quindi è un sottospazio di V.

La proprietà espressa dalla Proposizione 3.2 si può estendere ad un insieme qualunque di sottospazi di uno spazio vettoriale. Vale dunque la seguente

Proposizione 3.3. *L'intersezione di un numero qualunque di sottospazi di V è un sottospazio di V.*

Siano H e W sottospazi di V. Non è vero in generale che $H \cup W$ è sottospazio di V (cfr. Esempio 3.5). Si pone allora il problema di determinare il più piccolo sottospazio (rispetto all'inclusione) che contiene $H \cup W$. A tale proposito, considerato il sottoinsieme

$$H + W = \{ \mathbf{v} + \mathbf{w} : \mathbf{v} \in H \text{ e } \mathbf{w} \in W \},$$

si ha che :

Proposizione 3.4. *Se H e W sono sottospazi di V, il sottoinsieme $H + W$ è un sottospazio di V ed è il più piccolo (rispetto all'inclusione) sottospazio di V che contiene $H \cup W$.*

Dimostrazione. Poiché H e W sono non vuoti, allora $H + W$ è non vuoto. Proviamo per prima cosa che $H + W$ è stabile rispetto all'addizione. Siano $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ due elementi di $H + W$. Applicando le proprietà (2.1) e (2.4) si ha : $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (\mathbf{v}' + \mathbf{w}') = (\mathbf{v} + \mathbf{v}') + (\mathbf{w} + \mathbf{w}')$. Poiché H e W sono sottospazi, $\mathbf{v} + \mathbf{v}' \in H$ e $\mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W$. Ne segue che $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (\mathbf{v}' + \mathbf{w}') \in H + W$.
Analogamente si prova la stabilità di $H + W$ rispetto alla moltiplicazione per un numero reale. Il sottoinsieme $H + W$ è dunque sottospazio di V.
Sia ora $\mathbf{v}$ un vettore di H. Poiché $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$ e $\mathbf{0} \in W$, allora $\mathbf{v} \in H + W$. Si ha quindi che $H \subseteq H + W$. Analogamente si prova che $W \subseteq H + W$, e dunque $H \cup W \subseteq H + W$.
Se Z è un sottospazio di V che contiene $H \cup W$, allora, per ogni $\mathbf{v} \in H$ e per ogni $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in Z$ e quindi $H + W \subseteq Z$. Ogni sottospazio contenente sia H che W contiene allora $H + W$. Ciò significa che $H + W$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene $H \cup W$. L'asserto è così completamente provato.

Il sottospazio $H + W$ è detto (sottospazio) *somma* di H e W.

Siano $H_1, H_2, \ldots, H_t$ t sottospazi di V. Posto $H_1 + H_2 + \ldots + H_t = \{ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_t : \mathbf{v}_i \in H_i$ per ogni $i = 1, \ldots, t\}$, si può dimostrare che $H_1 + H_2 + \ldots + H_t$ è il più piccolo sottospazio di V contenente $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_t$. Esso prende il nome di (sottospazio) *somma* dei sottospazi $H_1, H_2, \ldots, H_t$.

La somma $H_1 + H_2 + \ldots + H_t$ dei sottospazi $H_1, H_2, \ldots, H_t$ si dice *diretta* se ognuno dei sottospazi interseca nel solo vettore nullo la somma dei rimanenti. In particolare, se $t = 2$, ciò significa che $H_1 \cap H_2 = \{\mathbf{0}\}$. Per indicare che una somma è diretta si usa il simbolo $H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_t$. Due sottospazi H_1 e H_2 di V si dicono *supplementari* se $H_1 \oplus H_2 = V$.

4. SOTTOSPAZIO GENERATO DA UN SISTEMA DI VETTORI

Sia V uno spazio vettoriale. Si dice *sistema* di vettori di *ordine* $t\ (\geq 1)$ di V ogni t-pla $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t \}$ di vettori di V non necessariamente distinti. Siano $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t \}$ ed $S' = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s \}$ due sistemi di vettori di V. Si dice che S è contenuto in S', e si scrive $S \subseteq S'$, se, per ogni $\mathbf{v}_i \in S$, si ha che $\mathbf{v}_i \in S'$ e inoltre $\mathbf{v}_i$ compare in S' almeno tante volte quante compare in S.

Sia $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t \}$ un sistema di vettori di V e sia $\mathbf{v}$ un vettore di V. Si dice che $\mathbf{v}$ *dipende (linearmente)* da S, o che $\mathbf{v}$ dipende dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$, se $\mathbf{v}$ si può ottenere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ mediante opportuni scalari. Si ha cioè che :

$$\mathbf{v} \text{ dipende da } S \Leftrightarrow \exists\, h_1, h_2, \ldots, h_t \in \mathbb{R} \ : \ \mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t.$$

Proposizione 4.1 *Sia $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_t \}$ un sistema di vettori di V. Si ha :*

(i) $\mathbf{0}$ dipende da S;

(ii) per ogni $v_i \in S$, v_i dipende da S;

(iii) se T è un sistema di vettori che contiene S, allora ogni vettore che dipende da S dipende anche da T.

Dimostrazione. (i) Poiché $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \ldots + 0\mathbf{v}_t$, allora $\mathbf{0}$ dipende da S.

(ii) Poiché $\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_{i-1} + 1\,\mathbf{v}_i + 0\mathbf{v}_{i+1} + \ldots + 0\mathbf{v}_t$, allora $\mathbf{v}_i$ dipende da S.

(iii) Sia $T = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_h \}$. Se $\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_t\mathbf{v}_t$, allora si ha $\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_t\mathbf{v}_t + 0\mathbf{w}_1 + \dots + 0\mathbf{w}_h$ e dunque $\mathbf{v}$ dipende anche da T.

Sia $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t \}$ un sistema di vettori di V. Indichiamo con L(S) o con $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t)$ l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori di S; poniamo cioè $L(S) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t) = \{ h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_t\mathbf{v}_t$, al variare di $h_1, h_2, \dots, h_t$ in $\mathbb{R}\}$.

Proposizione 4.2. *L(S) è il più piccolo (rispetto all'inclusione) sottospazio di $\mathbb{V}$ che contiene i vettori di S.*

Dimostrazione. Cominciamo col provare che L(S) è un sottospazio di V. Per la (i) della Proposizione 4.1, $\mathbf{0} \in L(S)$ e dunque L(S) non è vuoto. Siano $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_t\mathbf{v}_t$ e $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_t\mathbf{v}_t$ due elementi di L(S). Si ha $(h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_t\mathbf{v}_t) + (k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_t\mathbf{v}_t) = (h_1+ k_1)\mathbf{v}_1 + (h_2+ k_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (h_t+ k_t)\mathbf{v}_t \in L(S)$ e dunque L(S) è stabile rispetto all'addizione. Analogamente si prova la stabilità di L(S) rispetto alla moltiplicazione per un numero reale. L(S) è dunque un sottospazio che, per la (ii) dalla Proposizione 4.1, contiene i vettori di S.

Sia ora W un sottospazio di V che contiene i vettori di S. Per l'Osservazione 3.1 tutti i vettori di L(S) appartengono a W e quindi $L(S) \subseteq W$.

Il sottospazio L(S) è detto *sottospazio generato* da S (o dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$).

Osservazione 4.1. E' facile rendersi conto che, se W e H sono sottospazi di V ed è $W = L(S)$ ed $H = L(T)$, allora $W + H = L(S \cup T)$.

Siano S e T due sistemi di vettori di V. Si dice che S e T sono *equivalenti* se $L(S) = L(T)$, cioè se S e T generano lo stesso sottospazio di V.

Si verifica facilmente che :

Proposizione 4.3 . *Siano S e T due sistemi di vettori di V.*

S ***e*** *T sono equivalenti* $\Leftrightarrow$ *ogni vettore di S dipende da T ed ogni vettore di T dipende da S.*

Proposizione 4.4 . *Se* $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ *e B è una matrice equivalente (per righe) ad A, detti S e T i sistemi di vettori di* $\mathbb{R}^n$ *costituiti rispettivamente dalle righe di A e di B,* ***si*** *ha che S e T sono equivalenti, cioè* $L(S) = L(T)$.

La nozione di sottospazio generato da un sistema di vettori si estende ad un qualunque sottoinsieme X non vuoto di V. Precisamente, si definisce *sottospazio generato* da X, e lo si denota con L(X), il più piccolo sottospazio di V che contiene X. Si prova che L(X) è l'insieme di tutte le combinazioni lineari ottenute mediante vettori appartenenti a X.

5. DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

Sia V uno spazio vettoriale e sia $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t \}$ un sistema di vettori di V.

Si dice che S è *(linearmente) dipendente* o *legato* se esistono t scalari **non tutti nulli** $h_1, h_2, \dots, h_t$ tali che $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$.

Si dice che S è *(linearmente) indipendente* o *libero* se S non è dipendente, cioè se $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + +\dots + 0\mathbf{v}_t$ è l'**unica** combinazione lineare dei vettori di S che sia uguale al vettore nullo. Dire quindi che S è linearmente indipendente significa dire che :

$$h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0} \Rightarrow h_1 = h_2 = \dots = h_t = 0 \ .$$

Se un sistema $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t \}$ è dipendente (indipendente), diremo che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$ sono dipendenti (indipendenti).

Osservazione 5.1. E' immediato verificare che, se S è un sistema di vettori di V che contiene il vettore nullo oppure due vettori proporzionali, allora S è dipendente.

Proviamo che :

Proposizione 5.1 . *Sia $S = \{ v_1, v_2, \dots, v_t \}$, $t \geq 2$, un sistema di vettori di V.*

(i) S è dipendente $\Leftrightarrow$ esiste in S un vettore che dipende dai rimanenti ;

(ii) S è indipendente $\Leftrightarrow$ nessuno dei vettori di S dipende dai rimanenti.

Dimostrazione. (i) Sia S dipendente. Esistono allora t scalari $h_1, h_2, \dots, h_t$ non tutti nulli tali che $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$. Supponiamo che sia $h_1 \neq 0$ (analogamente si procede negli altri casi). Si ha : $\mathbf{v}_1 = -(h_1)^{-1}h_2\mathbf{v}_2 - \dots - (h_1)^{-1}h_t\mathbf{v}_t$ e dunque $\mathbf{v}_1$ dipende da $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$.

Viceversa, supponiamo che in S uno dei vettori, diciamo $\mathbf{v}_1$, dipende dai rimanenti. Esistono quindi degli scalari $h_2, \ldots, h_t$ tali che $\mathbf{v}_1 = h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t$. Si ha allora : $1\,\mathbf{v}_1 - h_2\mathbf{v}_2 - \ldots - h_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$ e dunque S è dipendente.

(ii) **Segue** banalmente dalla (i).

Osserviamo che dalla (i) della Proposizione precedente segue in particolare che un sistema costituito da due vettori non nulli è dipendente se, e solo se, i due vettori sono proporzionali.

ESEMPI

5.1. Sia $S = \{ \mathbf{v} \}$. Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora per l' Osservazione 5.1 S è dipendente. Se invece $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, allora S è indipendente in quanto $h\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, implica $h = 0$, per la Proprietà III degli spazi vettoriali (cfr. Paragrafo 2).

5.2. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, consideriamo i seguenti sistemi di vettori :

$S_1 = \{ (1, 0, 0), (1, 2, 0), (3, 4, 5) \}$, $S_2 = \{ (2, -1, 0), (4, 3, 1), (2, 4, 1) \}$, $S_3 = \{ (-1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 1, -1) \}$, $S_4 = \{(2, -2, 3), (-4, 4, -6) \}$, $S_5 = \{ (3, 1, 1), (3, 1, 2) \}$.

Sia $h_1(1, 0, 0) + h_2(1, 2, 0) + h_3(3, 4, 5) = (0, 0, 0)$. Si ottiene : $(h_1 + h_2 + 3h_3, 2h_2 + 4h_3, 5h_3) = (0, 0, 0)$, da cui $\begin{cases} h_1 + h_2 + 3h_3 = 0 \\ \quad\ \ 2h_2 + 4h_3 = 0 \\ \qquad\quad\ \ 5h_3 = 0 \end{cases}$. Tale sistema lineare nelle incognite h_1, h_2, h_3 ha come unica soluzione $(0, 0, 0)$ e dunque S_1 è indipendente.

Il sistema S_2 è dipendente per la Proposizione 5.1 in quanto risulta $(4, 3, 1) = (2, -1, 0) + (2, 4, 1)$.

Sia $h_1(-1, 1, 1) + h_2(0, 1, 0) + h_3(1, 1, -1) = (0, 0, 0)$, da cui $\begin{cases} -h_1 + h_3 = 0 \\ h_1 + h_2 + h_3 = 0 \\ h_1 - h_3 = 0 \end{cases}$

che si riduce a $\begin{cases} -h_1 + h_3 = 0 \\ h_2 + 2h_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$. Tale sistema lineare ha come soluzioni tutte e sole le terne $(h_3, -2h_3, h_3)$, al variare di h_3 in $\mathbb{R}$ e dunque S_3 è dipendente.

S_4 è dipendente poiché $(-4, 4, -6) = -2\,(2, -2, 3)$ mentre S_5 è indipendente poiché i due vettori che lo compongono non sono proporzionali.

5.3. Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ dei vettori geometrici dello spazio applicati in un punto O (cfr. Esempio 2.3), si verifica facilmente che due vettori sono dipendenti se, e solo se, giacciono su una stessa retta, mentre tre vettori sono dipendenti se, e solo se, giacciono su uno stesso piano.

Osservazione 5.2. Si verifica facilmente che :

Se $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t \} \subseteq T = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s \}$ sono due sistemi di vettori di V, allora :

(i) Se S è dipendente, T è dipendente.

(ii) Se T è indipendente, S è indipendente.

Si ha infatti :

(i) Poiché S è dipendente, esistono t scalari $h_1, h_2, \ldots, h_t$ non tutti nulli tali che $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$. Ne segue che $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t + 0\,\mathbf{w}_1 + \ldots + 0\,\mathbf{w}_s = \mathbf{0}$ e dunque T è dipendente.

(ii) Segue immediatamente dalla (i).

Proviamo ora che :

Proposizione 5.2. *Se $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_t \}$ è un sistema indipendente, ogni vettore che dipende da S vi dipende in unico modo.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v}$ un vettore che dipende da S. Vogliamo provare che $\mathbf{v}$ si può scrivere in unico modo come combinazione lineare dei vettori di S. Se $\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_t\mathbf{v}_t$, si ha $(h_1 - k_1)\,\mathbf{v}_1 + (h_2 - k_2)\,\mathbf{v}_2 + \ldots + (h_t - k_t)\,\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$. Poiché S è indipendente, $h_1 - k_1 = h_2 - k_2 = \ldots = h_t - k_t = 0$, da cui $h_i = k_i$, per ogni $i = 1, \ldots, t$.

Proposizione 5.3. *Se $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_t \}$ è un sistema indipendente e v è un vettore di V che non dipende da S, allora il sistema $S \cup \{ v \} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_t, v \}$ è indipendente.*

Dimostrazione. Sia $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t + h\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Si deve provare che $h_1 = h_2 = \ldots = h_t = h = 0$. Se fosse $h \neq 0$, si avrebbe $\mathbf{v} = -h^{-1}h_1\mathbf{v}_1 - h^{-1}h_2\mathbf{v}_2 - \ldots - h^{-1}h_t\mathbf{v}_t$ e quindi $\mathbf{v}$ dipenderebbe da S, contro l'ipotesi. E' dunque $h = 0$. L'uguaglianza $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t + h\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si può allora scrivere nel seguente modo: $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$. Essendo S indipendente, si ha $h_1 = h_2 = \ldots = h_t = 0$. L'asserto è così provato.

Dalla Proposizione 5.3 segue immediatamente il seguente :

Corollario 5.4. *Se $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_t \}$ è un sistema indipendente e v è un vettore di V tale che $S \cup \{ v \} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_t, v \}$ è dipendente, allora v dipende da S.*

6. BASI E DIMENSIONE

Sia V uno spazio vettoriale. Si dice che V è *finitamente generabile* se esiste un sistema $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t\}$ di vettori di V tale che $V = L(S)$, cioè tale che ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di S. In tal caso si dice che S è un *sistema di generatori* di V o che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ *generano* V.

ESEMPI

6.1. Lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ è finitamente generabile in quanto $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$ è un sistema di vettori di $\mathbb{R}^n$ che lo genera : per ogni $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha infatti che $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + a_n(0, \ldots, 0, 1)$.

6.2. Consideriamo i seguenti sistemi di vettori di $\mathbb{R}^2$: $S = \{ (1, 0), (2, 0) \}$, $T = \{ (1, 0), (1, 1) \}$, $Z = \{ (1, 0), (0, 1), (2, -1) \}$.
Il sistema S non genera $\mathbb{R}^2$, in quanto esiste in $\mathbb{R}^2$ almeno un vettore che non dipende da S, ad esempio il vettore (1, 1). Il sistema T genera $\mathbb{R}^2$ in quanto, per ogni (a, b) di $\mathbb{R}^2$, si ha : $(a, b) = (a - b)(1, 0) + b(1, 1)$. E' facile verificare che il sistema Z genera $\mathbb{R}^2$ (cfr. Esempio 6.1 e Proposizione 4.1 (iii)).

6.3. Consideriamo i seguenti sistemi di vettori di $\mathbb{R}^3$: $S = \{ (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, -1), (0, 0, 0) \}$, $T = \{ (1, 0, 1), (0, 0, 1), (5, 0, 3) \}$, $Z = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0) \}$.
E' facile verificare che S genera $\mathbb{R}^3$, mentre T e Z non lo generano.

6.4. Lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ dei vettori geometrici dello spazio applicati in un punto O (cfr. Esempio 2.3) è finitamente generabile in quanto, come facilmente si prova, ogni sistema costituito da tre vettori non complanari genera $\mathcal{V}_O$.

6.5. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in x a coefficienti reali (cfr. Esempio 2.6) non è finitamente generabile. Considerato infatti un sistema S di vettori non tutti nulli di $\mathbb{R}[x]$, sia M il massimo dei gradi dei polinomi in S. Un polinomio di grado maggiore di M non può essere scritto come combinazione lineare dei polinomi di S. Ne segue che nessun sistema di vettori di $\mathbb{R}[x]$ può generare $\mathbb{R}[x]$.

6.6. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, con $a_0 , a_1 , a_2 \in \mathbb{R} \}$ (cfr. Esempio 3.4) è finitamente generabile, in quanto il sistema di vettori $S = \{ 1, x, x^2 \}$ genera $\mathbb{R}_2[x]$: per ogni polinomio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, è $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ combinazione lineare dei polinomi 1, x ed x^2 mediante gli scalari a_0 , a_1 ed a_2 .

Si dice *base* di V ogni sistema indipendente di generatori di V.

Proposizione 6.1. *Ogni spazio vettoriale V finitamente generabile e non ridotto al solo vettore nullo ammette basi.*

Dimostrazione. Sia $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t \}$ un sistema di generatori di V. Se S è indipendente, allora S è una base di V. Supponiamo ora S dipendente. Per la Proposizione 5.1 esiste in S un vettore, diciamo $\mathbf{v}_1$, che dipende dai rimanenti. Si ha quindi

(6. 1) $\qquad \mathbf{v}_1 = k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 + \ldots + k_t \mathbf{v}_t , \qquad$ con $k_2, k_3 , \ldots , k_t \in \mathbb{R}$.

Posto $S' = S \setminus \{ \mathbf{v}_1 \} = \{ \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t \}$, proviamo che S' genera V. Sia $\mathbf{v} \in V$. Poiché S genera V, esistono t scalari, $h_1, \ldots, h_t$, tali che

(6. 2) $\qquad \mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t$.

Dalle (6.1) e (6.2) segue che $\mathbf{v} = h_1(k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 + \ldots + k_t \mathbf{v}_t) + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t = (h_1 k_2 + h_2) \mathbf{v}_2 + \ldots + (h_1 k_t + h_t) \mathbf{v}_t \in L(S')$. Si ha così $V = L(S')$.

Se S' è indipendente, S' è una base di V. In caso contrario, esiste in S' un vettore che dipende dai rimanenti. Ripetendo il ragionamento precedente, troviamo in S' un sistema S" che genera ancora V. Se S" è indipendente, esso è una base di V, altrimenti si procede in maniera analoga a quanto prima fatto. Poiché V non è ridotto al solo vettore nullo, dopo al più t – 1 passi, si ottiene una base di V.

Da quanto visto nel corso della dimostrazione della Proposizione 6.1 segue il

Corollario 6.2. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generabile e non ridotto al vettore nullo. Ogni sistema di generatori di V contiene almeno una base di V.*

ESEMPI

6.7. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ consideriamo il sistema di vettori B = { (1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1) }. Per l'Esempio 6.1, B genera $\mathbb{R}^n$. Poiché inoltre, come facilmente si verifica, B è indipendente, allora B è una base di $\mathbb{R}^n$, che viene detta *base naturale* (o *canonica*, o *standard*) di $\mathbb{R}^n$.

6.8. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ consideriamo i sistemi di vettori T = { (1, 0), (1, 1)} e Z = { (1, 0), (0, 1), (2, -1) }. Per l'Esempio 6.2, sia T che Z generano $\mathbb{R}^2$, ma solo T è una base di $\mathbb{R}^2$, in quanto T è indipendente, mentre Z non lo è. Osserviamo che i sistemi { (1, 0), (0, 1) }, { (1, 0), (2, -1) } e { (0, 1), (2, -1) } contenuti in Z sono basi di $\mathbb{R}^2$ (cfr. Corollario 6.2).

6.9. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ consideriamo i sistemi di vettori S = { (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, - 1), (0, 0, 0) } e T = { (1, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 0, -1) }. Entrambi i sistemi S e T generano $\mathbb{R}^3$, ma solo T è una base di $\mathbb{R}^3$ in quanto T è indipendente, mentre S non lo è. Osserviamo che in S è contenuta la base { (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, - 1) } di $\mathbb{R}^3$.

6.10. Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ dei vettori geometrici dello spazio applicati in un punto O (cfr. Esempio 2.3) consideriamo un sistema S costituito da tre vettori non complanari. Per gli Esempi 5.3 e 6.4, S è una base di $\mathcal{V}_O$.

6.11. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 , \text{ con } a_0 , a_1 , a_2 \in \mathbb{R} \}$ consideriamo il sistema di vettori $S = \{ 1, x, x^2 \}$. Per l'Esempio 6.6, S genera $\mathbb{R}_2[x]$. Proviamo ora che S è indipendente. Sia $h_0 1 + h_1 x + h_2 x^2 = \mathbf{0} = 0\,1 + 0\,x + 0\,x^2$. Uguagliando i coefficienti dei termini di ugual grado, si ricava $\begin{cases} h_0 = 0 \\ h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{cases}$, onde S è indipendente. Si ha quindi che S è una base di $\mathbb{R}_2[x]$.

6.12. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_n[x] = \{ a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n , \text{ con } a_0 , \dots , a_n \in \mathbb{R} \}$ (cfr. Esempio 3.4) consideriamo il sistema di vettori $S = \{ 1, x, \dots , x^n \}$. Si verifica facilmente che S è una base di $\mathbb{R}_n[x]$, detta *base naturale* di $\mathbb{R}_n[x]$.

6.13. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{m,\, n}$ delle matrici di tipo [m, n] su $\mathbb{R}$ (cfr.Esempio 2.2), i vettori $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \quad \dots , \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ costituiscono una base, come facilmente si prova. Tale base è detta detta *base naturale* di $\mathbb{R}_{m,\, n}$.

Lemma 6.3. (di Steinitz)[1]. *Siano $S = \{ v_1, v_2, \dots, v_h\}$ e $T = \{ w_1, w_2, \dots, w_k\}$ due sistemi di vettori di uno spazio vettoriale. Se T è indipendente ed è contenuto in L(S), allora $k \leq h$.*

Teorema 6.4. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generabile e non ridotto al solo vettore nullo. Tutte le basi di V hanno lo stesso ordine (ovvero lo stesso numero di vettori).*

[1] Per la dimostrazione confronta, ad esempio, T. Apostol, Cap. II , Teorema 3.5.

Dimostrazione. Siano $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ due basi di V. I sistemi di vettori B_1 e B_2 sono dunque indipendenti ed $L(B_1) = L(B_2) = V$. Poiché B_2 è un sistema indipendente contenuto in $V = L(B_1)$, per il Lemma 6.3 si ha che $m \leq n$. Analogamente, poiché B_1 è un sistema indipendente contenuto in $V = L(B_2)$, allora, sempre per il Lemma 6.3, è $n \leq m$. Ne segue che $n = m$.

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generabile. Se V non si riduce al solo vettore nullo, per il Teorema 6.4 tutte le basi di V hanno lo stesso ordine $n \geq 1$. L'intero n è detto la *dimensione* di V. Se $V = \{\mathbf{0}\}$, si attribuisce a V dimensione zero. Ad ogni spazio vettoriale non finitamente generabile si attribuisce dimensione infinita.

Per indicare che n è la dimensione di V, scriveremo $\dim V = n$. Uno spazio vettoriale di dimensione finita n sarà di solito indicato con V_n.

Dagli Esempi 6.7, 6.10, 6.12 e 6.13 segue che :

$$\dim \mathbb{R}^n = n, \qquad \dim \mathcal{V}_O = 3, \qquad \dim \mathbb{R}_n[x] = n+1, \qquad \dim \mathbb{R}_{m,n} = m\,n\,.$$

Alcune proprietà di uno spazio vettoriale di dimensione n sono contenute nella seguente

Proposizione 6.5. *Se $V \neq \{0\}$ ha dimensione n, si ha:*

(i) *l'ordine di ogni sistema indipendente di vettori di V è al più n;*

(ii) *ogni sistema indipendente di ordine n è una base di V;*

(iii) *ogni sistema di generatori di V di ordine n è una base di V.*

Dimostrazione. Sia B una base di V ed S un sistema indipendente. Poiché $S \subseteq L(B) = V$, dal Lemma di Steinitz segue la (i).

Proviamo ora la (ii). Sia S un sistema indipendente costituito da n vettori. Per provare che S è una base di V, basta provare che S genera V. Se, per assurdo, fosse $L(S) \subset V$, esisterebbe almeno un vettore $\mathbf{w} \in V \setminus L(S)$. Per la Proposizione 5.3, il sistema $S \cup \{\mathbf{w}\}$ sarebbe allora indipendente, contro la (i).

Proviamo infine la (iii). Sia S un sistema di generatori di V costituito da n vettori. Per il Corollario 6.2, esiste almeno una base B di V contenuta in S. Poiché S e B hanno entrambi ordine n, allora necessariamente S = B.

Proposizione 6.6 (*completamento di un sistema indipendente in una base*). *Se $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ è un sistema indipendente di uno spazio vettoriale V_n, esiste una base di V_n che contiene S.*

Dimostrazione . Per la (i) della Proposizione 6.5, è $t \leq n$.

Se $t = n$, per la (ii) della Proposizione 6.5, S è una base di V_n .

Se $t < n$, per il Teorema 6.4, S non è una base di V_n e dunque $L(S) \subset V_n$. Sia $\mathbf{v}_{t+1} \in V_n \setminus L(S)$. Per la Proposizione 5.3, il sistema $S' = S \cup \{\mathbf{v}_{t+1}\}$ è indipendente. Se $t+1 = n$, S' è una base di V_n che contiene S. Se $t+1 < n$, ripetendo il ragionamento precedente, si ottiene un sistema S" di ordine t+2 che è indipendente e contiene S. Procedendo in tal modo, dopo $n - t$ passi si ottiene un sistema indipendente di ordine n, cioè una base di V_n, che contiene S.

Si prova che :

Proposizione 6.7. *Sia W un sottospazio di uno spazio vettoriale V_n .*

(i) *W è finitamente generabile e $\dim W \leq n$;*

(ii) $\dim W = n \Leftrightarrow W = V_n$.

Dalla Proposizione 6.7 segue immediatamente la seguente

Proposizione 6.8. *Siano W e Z due sottospazi di uno spazio vettoriale V_n .*

(i) $W \subseteq Z \Rightarrow \dim W \leq \dim Z$;

(ii) $W \subseteq Z$ e $\dim W = \dim Z \Rightarrow W = Z$.

Proviamo che :

Teorema 6.9 (*relazione di Grassmann*). *Siano W e H due sottospazi di uno spazio vettoriale V_n. Si ha :* dim(W+H) = dimW + dimH − dim(W ∩ H) OPPURE

$$\dim W + \dim H = \dim(W \cap H) + \dim(W + H).$$

Dimostrazione. Basta provare che

$$\dim(W + H) = \dim W + \dim H - \dim(W \cap H).$$

Supponiamo in primo luogo che $W \cap H \neq \{ \mathbf{0} \}$. Sia $B_i = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i \}$ una base di $W \cap H$. Completiamo B_i in una base $B_w = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_{i+1}, \ldots, \mathbf{w}_s \}$ di W (cfr. Proposizione 6.6) . Analogamente, completiamo B_i in una base $B_H = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \mathbf{z}_{i+1}, \ldots, \mathbf{z}_t \}$ di H. Consideriamo ora il sistema $B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_{i+1}, \ldots, \mathbf{w}_s, \mathbf{z}_{i+1}, \ldots, \mathbf{z}_t \}$ di vettori di W + H. Tale sistema ha ordine $\dim W + \dim H - \dim(W \cap H)$. Per provare l'asserto basta mostrare che B è una base di W + H. Cominciamo a provare che B genera W + H. Sia $\mathbf{v} + \mathbf{z} \in W + H$. Poiché $\mathbf{v} \in W$, $\mathbf{v}$ è combinazione lineare dei vettori di B_W; poiché $\mathbf{z} \in H$, allora $\mathbf{z}$ è combinazione lineare dei vettori di B_H. Ne segue che $\mathbf{v} + \mathbf{z}$ è combinazione lineare dei vettori di B e dunque B genera W + H. Proviamo ora che B è indipendente. Sia

$$h_1 \mathbf{v}_1 +\ldots, h_i \mathbf{v}_i + h_{i+1} \mathbf{w}_{i+1} + \ldots + h_s \mathbf{w}_s + k_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} + \ldots + k_t \mathbf{z}_t = \mathbf{0}. \tag{6.3}$$

Da tale relazione segue che $h_1\mathbf{v}_1 + \ldots + h_i\mathbf{v}_i + h_{i+1}\mathbf{w}_{i+1} + \ldots + h_s\mathbf{w}_s = -(k_{i+1}\mathbf{z}_{i+1} + \ldots + k_t\mathbf{z}_t)$. Poiché $h_1\mathbf{v}_1 + \ldots + h_i\mathbf{v}_i + h_{i+1}\mathbf{w}_{i+1} + \ldots + h_s\mathbf{w}_s$ appartiene a W e $k_{i+1}\mathbf{z}_{i+1} + \ldots + k_t\mathbf{z}_t$ appartiene ad H, allora il vettore $k_{i+1}\mathbf{z}_{i+1} + \ldots + k_t\mathbf{z}_t$ appartiene a $W \cap H$. Esso è dunque combinazione lineare dei vettori di B_i; si ha quindi $k_{i+1}\mathbf{z}_{i+1} + \ldots + k_t\mathbf{z}_t = k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_i\mathbf{v}_i$, per opportuni scalari $k_1, \ldots, k_i$. Ne segue che $k_{i+1}\mathbf{z}_{i+1} + \ldots + k_t\mathbf{z}_t - k_1\mathbf{v}_1 - \ldots - k_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Poiché $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \mathbf{z}_{i+1}, \ldots, \mathbf{z}_t \}$ è indipendente, essendo una base di H, gli scalari k_j sono tutti nulli; in particolare è $k_{i+1} = \ldots = k_t = 0$. Sostituendo tali valori nella (6.3), si ottiene : $h_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + h_i \mathbf{v}_i + h_{i+1} \mathbf{w}_{i+1} + \ldots + h_s \mathbf{w}_s = \mathbf{0}$, da cui $h_1 = \ldots = h_s = 0$, essendo $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_{i+1}, \ldots, \mathbf{w}_s \}$ una base di W. Abbiamo così provato che B è indipendente. Possiamo concludere che B è una base di W + H.

Supponiamo ora che $W \cap H = \{ \mathbf{0} \}$. Considerata una base $B_W = \{ \mathbf{w}_1 , \ldots, \mathbf{w}_s \}$ di W e una base $B_H = \{ \mathbf{z}_1 , \ldots, \mathbf{z}_t \}$ di H, un ragionamento analogo a quello usato nel caso precedente permette di provare che $B = \{ \mathbf{w}_1 , \ldots, \mathbf{w}_s, \mathbf{z}_1 , \ldots, \mathbf{z}_t \}$ è una base di W + H.

L'asserto è così completamente provato.

7. CAMBIAMENTI DI RIFERIMENTO

Sia $V_n \neq \{\mathbf{0}\}$. Una base ordinata di V_n è detta anche *riferimento* di V_n. Se $n > 1$, ogni base di V_n dà luogo a vari riferimenti; ad esempio, dalla base naturale $\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ di $\mathbb{R}^3$ si ottengono i seguenti 6 riferimenti :

$((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, $((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0))$,
$((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$, $((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$,
$((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$, $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$.

Diremo *riferimento naturale* dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ il riferimento

$((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1))$.

Analogamente, diremo *riferimento naturale* dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{m,n}$, il

$$\text{riferimento} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sia $R = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ un riferimento dello spazio vettoriale V_n. Dalla definizione di base e dalla Proposizione 5.2 segue che, per ogni $\mathbf{v} \in V_n$, esiste una e una sola n-pla ordinata $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + \ldots + h_n\mathbf{e}_n$. Gli scalari $h_1, \ldots, h_n$ sono detti le *componenti* di $\mathbf{v}$ in R.

Siano $R = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ed $R' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n')$ due riferimenti dello spazio vettoriale V_n. Indichiamo con $(b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1})$ la n-pla ordinata delle componenti di $\mathbf{e}_1$ nel riferimento R', con $(b_{12}, b_{22}, \ldots, b_{n2})$ la n-pla ordinata delle componenti di $\mathbf{e}_2$ nel riferimento R', e così via fino ad $\mathbf{e}_n$, la cui n-pla ordinata delle componenti nel riferimento R' sarà indicata con $(b_{1n}, b_{2n}, \ldots, b_{nn})$. Sia ora $\mathbf{v} \in V_n$. Dette $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le componenti di $\mathbf{v}$ in R ed $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ le componenti di $\mathbf{v}$ in R', si ha :

$$\text{(7.1)} \qquad \begin{cases} x_1' = b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \ldots + b_{1n} x_n \\ x_2' = b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + \ldots + b_{2n} x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n' = b_{n1} x_1 + b_{n2} x_2 + \ldots + b_{nn} x_n \end{cases} .$$

Le (7.1) sono dette *formule di passaggio dal riferimento R al riferimento R'.*

Posto $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdot \\ x_n' \end{pmatrix}$ ed $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$, le (7.1)

equivalgono all'unica relazione matriciale

$$\text{(7.2)} \qquad X' = BX .$$

La matrice B è detta *matrice di passaggio da R ad R'.*

ESEMPI

7.1 Considerati i riferimenti $R = ((1, 4, 1), (1, 5, 0), (2, 5, -1))$ ed $R' = ((1, 0, -1), (0, 2, 1), (2, 3, -2))$ di $\mathbb{R}^3$, determiniamo le formule di passaggio da R ad R'.

Poiché $(1, 4, 1) = (1, 0, -1) + 2(0, 2, 1) + 0(2, 3, -2)$

$(1, 5, 0) = -(1, 0, -1) + (0, 2, 1) + (2, 3, -2)$

$(2, 5, -1) = 0(1, 0, -1) + (0, 2, 1) + (2, 3, -2)$,

le formule richieste sono

$$(7.3) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = x_2 + x_3 \end{cases} .$$

Note le componenti di un vettore di $\mathbb{R}^3$ nel riferimento R, possiamo allora conoscere, mediante le (7.3), le componenti dello stesso vettore nel riferimento R'. Ad esempio, le componenti in R' del vettore $(-3, 2, 7) = 3(1, 4, 1) + 2(1, 5, 0) - 4(2, 5, -1)$ sono: $x_1' = 3 - 2 = 1$, $x_2' = 6 + 2 - 4 = 4$, $x_3' = 2 - 4 = -2$; è infatti $(-3, 2, 7) = 1(1, 0, -1) + 4(0, 2, 1) - 2(2, 3, -2)$.

8. ESERCIZI SULLA DETERMINAZIONE DI BASI

8.1. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il vettore $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2)$ (cfr. Prop. 6.6).

Un vettore che non dipende da $\mathbf{v}_1$ è, ad esempio, il vettore $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$. Il sottospazio $H = L((1, 0, 2), (1, 1, 0))$ ha dimensione due e quindi non contiene tutti e tre i vettori della base naturale di $\mathbb{R}^3$. Si vede facilmente, ad esempio, che $(1, 0, 0) \notin H$; il sistema $\{ (1, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 0, 0) \}$ è dunque indipendente e costituisce quindi una base di $\mathbb{R}^3$.

8.2. Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 3, 0)$.

Il sottospazio $H = L((2, -1, 0, 0), (0, 1, 3, 0))$ ha dimensione due e quindi non contiene tutti e quattro i vettori della base naturale di $\mathbb{R}^4$. Si vede facilmente, ad esempio, che $(1, 0, 0, 0) \notin H$. Il sistema $T = \{ (2, -1, 0, 0), (0, 1, 3, 0), (1, 0, 0, 0) \}$ è dunque indipendente. Il sottospazio $K = L(T)$ ha dimensione tre e pertanto non contiene tutti e quattro i vettori della base naturale di $\mathbb{R}^4$. Il vettore $(0, 0, 0, 1)$ non è in K e dunque il sistema $\{(2, -1, 0, 0), (0, 1, 3, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ è indipendente, per cui esso è una base di $\mathbb{R}^4$.

8.3. Determinare una base del sottospazio $H = L((1, 0, 1, 2), (-1, 2, 3, 0), (3, -2, -1, 4), (-2, 4, 6, 0))$ di $\mathbb{R}^4$ (cfr. Corollario 6.2).

Poiché il vettore $(-2, 4, 6, 0)$ dipende dai rimanenti (infatti $(-2, 4, 6, 0) = 2(-1, 2, 3, 0)$), allora $H = L((1, 0, 1, 2), (-1, 2, 3, 0), (3, -2, -1, 4))$. Poiché $(3, -2, -1, 4)$ dipende dai vettori $(1, 0, 1, 2)$ e $(-1, 2, 3, 0)$ (infatti $(3, -2, -1, 4) = 2(1, 0, 1, 2) - (-1, 2, 3, 0)$), allora $H = L((1, 0, 1, 2), (-1, 2, 3, 0))$. I vettori $(1, 0, 1, 2)$ e $(-1, 2, 3, 0)$, che generano H, sono indipendenti e costituiscono perciò una base di H. Ne segue che $\dim H = 2$. Osserviamo che, avendo H dimensione due, due qualsiasi vettori indipendenti appartenenti ad H ne costituiscono una base. Ne segue, ad esempio, che anche i sistemi $\{(1, 0, 1, 2), (3, -2, -1, 4)\}$, $\{(1, 0, 1, 2), (-2, 4, 6, 0)\}$, $\{(-1, 2, 3, 0), (3, -2, -1, 4)\}$ sono basi di H.

Un altro metodo per determinare una base di H è il seguente:

(i) Scriviamo i vettori $(1, 0, 1, 2)$, $(-1, 2, 3, 0)$, $(3, -2, -1, 4)$ e $(-2, 4, 6, 0)$ come righe di una matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix};$$

(ii) determiniamo una matrice a gradini B equivalente (per righe) ad A:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per la Proposizione 4.4, $H = L((1, 0, 1, 2), (0, 2, 4, 2))$. Poiché i vettori $(1, 0, 1, 2)$ e $(0, 2, 4, 2)$ sono indipendenti, essi costituiscono una base di H. *La dimensione di H è dunque uguale al numero dei pivot della matrice B.*

Osservazione 8.1. Poiché si prova che le righe non nulle di una matrice a gradini sono indipendenti, il metodo su indicato permette di determinare sempre la dimensione e una base di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di cui si conosce un sistema di generatori. Osserviamo esplicitamente che da quanto detto segue che due matrici a gradini equivalenti ad una stessa matrice hanno lo stesso numero di pivot. In particolare, *due matrici a gradini equivalenti hanno lo stesso numero di pivot.*

8.4. Sia S un sistema lineare omogeneo (su $\mathbb{R}$) in n incognite. E' facile provare che l'insieme H delle soluzioni di S è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

* diverse dal vettore nullo

Sia ora S a gradini. Usando le stesse notazioni del Paragrafo 3 del Capitolo I, diciamo p il numero delle* equazioni non identiche di S. Se S ammette solo la soluzione banale (è il caso in cui p = n), allora H = {**0**} e dimH = 0. Se, invece, S ammette infinite soluzioni (in tal caso è p < n), allora si prova che *il numero n-p delle variabili libere coincide con la dimensione di H*. Dette, per semplicità, $x_{p+1},\ldots,x_n$ tali variabili, una base di H è costituita dalle n-p soluzioni di S ottenute attribuendo di volta in volta ad una sola delle $x_{p+1},\ldots,x_n$ il valore 1 e alle restanti il valore 0.

Esempi:

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$ L'insieme delle soluzioni di S è H = {$(-x_3, 2x_3, x_3)$, con $x_3 \in \mathbb{R}$}. Poiché esiste una sola variabile libera, la x_3, allora dimH = 1. Una base di H è {(-1, 2, 1)}.

$$S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$ L'insieme delle soluzioni di S è H = {$(3x_4, -x_4, x_3, x_4)$, con $(x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2$}. Poiché le variabili libere sono due, allora dimH = 2. Una base di H è {(0, 0, 1, 0), (3, -1, 0, 1)}.

OK

8.5. Determinare una base del sottospazio $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$ di $\mathbb{R}_{2,2}$.

Si può scrivere $\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ogni elemento di W è dunque combinazione lineare delle due matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ che, ovviamente, appartengono a W. Ne segue che W = L $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Essendo inoltre le due matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ indipendenti, esse costituiscono una base di W.

CAPITOLO III

DETERMINANTI, RANGO DI UNA MATRICE E MATRICI INVERTIBILI

1. DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Vogliamo associare ad A un numero reale che chiameremo *determinante* di A e indicheremo con det A.

Se n =1, ovvero A = (a), con $a \in \mathbb{R}$, si pone :

(1.1) $$\det A = \det (a) = a.$$

Il determinante delle matrici quadrate di ordine $n \geq 2$ si definisce, come tra breve vedremo, a partire dal determinante delle matrici quadrate di ordine n-1. Noto allora il determinante delle matrici di ordine 1, sarà possibile definire il determinante delle matrici di ordine 2; una volta definito il determinante delle matrici di ordine 2, si potrà definire il determinante delle matrici di ordine 3, e così via.

Sia A una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$. Per ogni elemento a_{ij} di A, si dice *matrice complementare* di a_{ij}, e si indica con A(i,j), la matrice quadrata di ordine n-1 che si ottiene da A cancellando la riga i-ma e la colonna j-ma. Si dice *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij}, e si indica con A_{ij}, il determinante della matrice A(i,j) preso col proprio segno o col segno opposto a seconda che i + j è pari o dispari. E' dunque $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i,j)$. Si prova che la somma dei prodotti degli elementi di una riga o colonna di A per i rispettivi complementi algebrici non varia al variare della riga o della colonna considerata; si ha cioè :

$$(1.2)\quad a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n} =$$
$$\ldots = a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ldots + a_{nn}A_{nn} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} =$$
$$\ldots = a_{1n}A_{1n} + a_{2n}A_{2n} + \ldots + a_{nn}A_{nn}.$$

Il numero reale definito dalla (1.2) è detto *determinante* di A.

Osserviamo esplicitamente che, se una riga (o una colonna) di A è costituita da tutti zeri, allora il determinante di A è zero.

Dalla (1.2) segue subito che, se n = 2, ovvero $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, det A = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Se $n \geq 2$ ed $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, il determinante di A si denota anche con i simboli $|A|$ e $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

ESEMPI

1.1. det (5) = 5; det (-2) = -2; det (0) = 0.

1.2. $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 6 = -1;$ $\det \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -12 - 4 = -16.$

1.3. Considerate le matrici $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, determiniamo A_{12}, A_{22}, B_{11}, B_{22}, B_{23} e B_{32}.

$A_{12} = -\det(2) = -2$; $A_{22} = \det(6) = 6$.

$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$; $B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$; $B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 0) =$ -2;

$B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 + 0) = -4$.

1.4. Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ utilizzando una volta la prima riga e una volta la seconda.

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\left(-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\right) - 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(2) - (-4) - 3(-4) = 20;$$

$$\det A = 0\left(-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right) + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\left(-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right) = 0 + 1(22) + 1(-2) = 20.$$

1.5. Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Poiché, per calcolare il determinante di A, possiamo scegliere arbitrariamente una riga o una colonna di A (si dice in tal caso che si *sviluppa il determinante* secondo tale riga o colonna), è chiaro che conviene scegliere una riga o una colonna in cui compare il maggior numero di zeri; scegliamo dunque la seconda colonna. Si ha :

$\det A =$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) + 4\left(2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}\right)$$

$= -172$.

2. PROPRIETA' DEI DETERMINANTI

Vediamo ora alcune proprietà dei determinanti. D'ora in avanti A indicherà una matrice quadrata di ordine n. Si ha :

(2.1) *det A = det A' ;*

(2.2) *se si scambiano due righe (o due colonne) di A, il determinante cambia segno;*

(2.3) *se due righe (o due colonne) di A coincidono, allora det A = 0;*

(2.4) *detta A' la matrice ottenuta da A moltiplicando una riga (o una colonna) per un numero reale h, si ha : det A' = h det A;*

(2.5) *se si aggiunge ad una riga di A un'altra riga moltiplicata per un numero reale, il determinante non cambia; analogamente, se si aggiunge ad una colonna di A un'altra colonna moltiplicata per un numero reale, il determinante non cambia;*

(2.6) *se una riga di A dipende dalle rimanenti, ovvero le righe di A sono dipendenti, allora det A = 0; analogamente, se una colonna di A dipende dalle rimanenti, ovvero le colonne di A sono dipendenti, allora det A = 0.*

(2.7) *se B è una matrice quadrata di ordine n, det (AB) = det A det B.*

ESEMPI

2.1. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -22 .$$

2.2. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} ; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} .$$

2.3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

2.4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Moltiplicando la seconda colonna di A per -2, si ottiene la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & -8 & -1 \end{pmatrix}$. Per la proprietà (2.4), det A' = (-2) det A = (-2) (-22) = 44.

Sia ora $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 8 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché (8, 4, -4) = 4(2, 1, -1), si ha che det B = $4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\,(-2) = -8$.

2.5. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Aggiungendo alla terza colonna di A la prima moltiplicata per 2, si ottiene la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2+2 \\ 3 & 2 & 0+6 \\ 1 & 3 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Per la proprietà (2.5), det A = det A' . Sviluppando det A' secondo la prima riga, si ha che det A' $= 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -16$. E' dunque det A = -16.

2.6. Consideriamo il seguente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. Poiché la terza riga è la somma delle prime due, dalla proprietà (2.6) segue che tale determinante è uguale a zero.

Nell'Esempio 2.5 abbiamo visto come si può semplificare il calcolo del determinante di una matrice A : se infatti una riga (o colonna) di A ha almeno due elementi diversi da zero, utilizzando la proprietà (2.5) è possibile, senza alterare il determinante, sostituirla con un'altra avente un maggior numero di zeri.

3. RANGO DI UNA MATRICE

Sia A una matrice (su $\mathbb{R}$) di tipo [m, n]. Ricordiamo che le righe di A sono elementi dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ e le colonne di A sono elementi dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^m$. Si definisce *rango di riga* di A la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A e *rango di colonna* di A la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.

Se A è la matrice nulla, è evidente che il rango di riga di A e il rango di colonna di A sono entrambi zero.

Sia ora A una matrice non nulla. Per quanto visto nel Paragrafo 8 del Capitolo II, per determinare il rango di riga di A basta determinare una matrice a gradini B equivalente per righe ad A; il numero dei pivot di B è infatti la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A. Il rango di colonna di A coincide ovviamente col rango di riga della matrice trasposta di A. Nel corso del presente paragrafo vedremo che anche per una matrice non nulla il rango di riga coincide col rango di colonna.

Fissate h righe ed h colonne di A ($0 < h \leq m, n$), cancelliamo nella matrice A le m-h righe distinte dalle righe fissate e le n-h colonne distinte dalle colonne fissate; otteniamo così una matrice quadrata di ordine h il cui determinante è detto *minore di ordine h* di A individuato dalle righe e dalle colonne fissate. Se gli indici delle righe fissate sono $i_1, i_2, \ldots, i_h$ e gli indici delle colonne fissate sono $j_1, j_2, \ldots, j_h$, il minore sarà indicato con $|A|(i_1, i_2, \ldots, i_h; j_1, j_2, \ldots, j_h)$.

Osserviamo esplicitamente che i minori di ordine 1 di A sono tutti e soli gli elementi di A.

ESEMPI

3.1. Considerata la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 7 & 4 & 9 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, vogliamo determinare il minore di ordine 3 di A individuato dalla prima, seconda e quarta riga e dalla seconda, quarta e quinta colonna, cioè $|A|(1,2,4;\ 2,4,5)$. Cancelliamo allora nella matrice A la terza riga, la prima colonna e la terza colonna. Otteniamo così la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. E' allora $|A|(1,2,4;\ 2,4,5) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -16.$

Determiniamo ora il minore di ordine 2 di A individuato dalla prima e quarta riga e dalla prima e seconda colonna, cioè $|A|(1,4;\ 1,2)$. Cancellando in A la seconda e la terza riga e le colonne terza, quarta e quinta, otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Ne segue che $|A|(1,4;\ 1,2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = -5.$

Un minore si dice di *ordine massimo* se il suo ordine coincide col minimo tra m ed n.

Sia $|A|(i_1, i_2, \ldots, i_h;\ j_1, j_2, \ldots, j_h)$ un minore di ordine $h < m,n$. Fissata una riga $\mathbf{a}_i$ e una colonna $\mathbf{a}^j$ di A, con $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_h$ e $j \neq j_1, j_2, \ldots, j_h$, il minore $|A|(i_1, i_2, \ldots, i_h, i\ ;\ j_1, j_2, \ldots, j_h, j)$ è detto *orlato* di $|A|(i_1, i_2, \ldots, i_h;\ j_1, j_2, \ldots, j_h)$ mediante la riga $\mathbf{a}_i$ e la colonna $\mathbf{a}^j$.

ESEMPI

3.2. Consideriamo la matrice A dell'Esempio 3.1. Il minore $|A|(1,2,4;\ 2,4,5)$ possiede i due soli orlati $|A|(1,2,4,3;2,4,5,1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 7 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ e

$$|A|(1,2,4,3\ ;\ 2,4,5,3) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 9 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 & 5 \\ -5 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Il minore $|A|(1,4;\ 1,2)$ possiede invece 6 orlati. E' ad esempio $|A|(1,4,2\ ;\ 1,2,4) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } |A|(1,4,3\ ;\ 1,2,5) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Un minore $|A|(i_1, i_2, \ldots, i_h;\ j_1, j_2, \ldots, j_h)$ si dice *fondamentale* nei seguenti casi:

(3.1) $|A|(i_1, i_2, \ldots, i_h;\ j_1, j_2, \ldots, j_h) \neq 0$ ed $|A|(i_1, i_2, \ldots, i_h;\ j_1, j_2, \ldots, j_h)$ di ordine massimo (cioè $h = m$ o $h = n$);

(3.2) $|A|(i_1, i_2, \ldots, i_h;\ j_1, j_2, \ldots, j_h) \neq 0$, $h < m, n$ e **tutti** gli orlati di $|A|(i_1, i_2, \ldots, i_h;\ j_1, j_2, \ldots, j_h)$ sono uguali a zero.

Se A è la matrice nulla, è evidente che essa non possiede minori fondamentali. Supponiamo ora A non nulla e diamo un metodo per determinare un suo minore fondamentale. Considerato un elemento a di A diverso da zero, esso è un minore non nullo di ordine 1. Se tutti i suoi eventuali orlati sono uguali a zero, allora a è un minore fondamentale di A. Se, invece, esiste un orlato di a diverso da zero, diciamolo b, il minore a non è fondamentale. Consideriamo allora b. Esso è un minore di ordine 2 non nullo. Se tutti gli eventuali orlati di b sono uguali a zero, b è un minore fondamentale di A. In caso contrario, detto c un orlato di b diverso da zero, si procede analogamente a come fatto prima. Essendo le righe e le colonne di A in numero finito, il procedimento su descritto avrà termine con la determinazione di un minore fondamentale di A.

Osserviamo esplicitamente che una matrice non nulla non ammette in generale un unico minore fondamentale.

ESEMPI

3.3. Determiniamo un minore fondamentale per ognuna delle seguenti matrici :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la matrice A. Fissiamo in A un elemento diverso da zero, sia esso $a_{11} = |A|(1;1) = 1$ ed orliamolo mediante la seconda riga e la seconda colonna. Otteniamo il minore $|A|(1,2;\ 1,2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Orlando ora il minore $|A|(1;1)$ mediante la seconda riga e la terza colonna otteniamo $|A|(1,2;\ 1,3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Il minore $|A|(1;1)$ non è dunque un minore fondamentale. Orliamo allora $|A|(1,2;1,3)$ mediante la terza riga e la seconda colonna. Poiché risulta $|A|(1,2,3;\ 1,3,2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, è necessario considerare l'altro orlato di $|A|(1,2;\ 1,3)$, cioè $|A|(1,2,3;\ 1,3,4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Poiché il minore $|A|(1,2;\ 1,3)$ è diverso da zero e tutti i suoi orlati sono uguali a zero, allora $|A|(1,2;\ 1,3)$ è un minore fondamentale di A.

Lasciamo al lettore il compito di determinare almeno un altro minore fondamentale di A.

Consideriamo ora la matrice B. Fissiamo in B un elemento diverso da zero, sia esso $b_{12} = |B|(1;2) = 1$. Poiché, come è facile verificare, gli orlati di $|B|(1;2)$ mediante la seconda riga e tutte le possibili colonne sono uguali a zero, andiamo a considerare l'orlato di $|B|(1;2)$ mediante la terza riga e la prima colonna, ovvero $|B|(1,3; 2,1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Si ha così che $|B|(1;2)$ non è un minore fondamentale. Orlando ora $|B|(1,3; 2,1)$ mediante la quarta riga e la terza colonna, otteniamo $|B|(1,3,4; 2,1,3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Tale minore ammette $|B|$ come unico orlato. Essendo $|B| = 0$, allora $|B|(1,3,4; 2,1,3)$ è un minore fondamentale di B.

Consideriamo infine la matrice C. E' facile verificare che tutti i minori di ordine 2 di C sono minori fondamentali.

Enunciamo ora il seguente teorema, noto come *Teorema degli orlati.*

Teorema 3.1. *Sia A una matrice non nulla di tipo $[m, n]$. Se $|A|(i_1, i_2, \ldots, i_h; j_1, j_2, \ldots, j_h)$ è un suo minore fondamentale, allora le righe di indici $i_1, i_2, \ldots, i_h$ sono una base del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A e le colonne di indici $j_1, j_2, \ldots, j_h$ sono una base del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.*

Immediate conseguenze del Teorema degli orlati sono contenute nel seguente

Corollario 3.2. *Sia A una matrice non nulla di tipo [m, n]. Si ha:*

(i) se h è l'ordine di un minore fondamentale di A, allora h è la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ *generato dalle righe di A ed è anche la dimensione del sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *generato dalle colonne di A;*

(ii) tutti i minori fondamentali di A hanno lo stesso ordine.

Un'altra importante conseguenza del Teorema 3.1 è la seguente :

Proposizione 3.3. *Se A è una matrice quadrata di ordine n, allora* $|A| \neq 0$ *se, e solo se, le righe (le colonne) di A sono indipendenti.*

Dimostrazione. Se $|A| \neq 0$, dalla Proprietà (2.6) segue che le righe (le colonne) di A sono indipendenti. Viceversa, se le righe (le colonne) di A sono indipendenti, esse costituiscono una base del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ da esse generato. Tale sottospazio ha dunque dimensione n (e quindi coincide con $\mathbb{R}^n$). Dal Corollario 3.2 segue che n è l'ordine dei minori fondamentali di A. Poiché l'unico minore di ordine n di A è $|A|$, allora $|A| \neq 0$.

La (i) del Corollario 3.2 permette di affermare che, per ogni matrice A, il rango di riga coincide col rango di colonna. Tale intero è detto *rango* (*o caratteristica*) di A e sarà indicato con r(A). Evidentemente, *il rango di una matrice non nulla coincide con l'ordine di un suo minore fondamentale* ed anche *col numero dei pivot di una qualunque matrice a gradini ad essa equivalente.*

4. MATRICI INVERTIBILI

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}_{n,n}$ delle matrici quadrate di ordine n. La matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ è detta matrice *identica* (o *unitaria*) di ordine n. Si ha :

$A\, I_n = A = I_n\, A$, per ogni $A \in \mathbb{R}_{n,n}$.

Sia $A \in \mathbb{R}_{n,n}$. Si dice che A è *invertibile* se esiste una matrice $B \in \mathbb{R}_{n,n}$, detta *inversa* di A, tale che $AB = I_n = BA$. Si prova che ogni matrice invertibile A ammette un'unica matrice inversa, che viene denotata con A^{-1}. Evidentemente, I_n è invertibile e coincide con la propria inversa e inoltre per ogni matrice invertibile A, la matrice A^{-1} è anch'essa invertibile e la sua inversa coincide con A.

Vale la seguente

Proposizione 4.1. *Sia $A \in \mathbb{R}_{n,n}$. La matrice A è invertibile se, e solo se, $|A| \neq 0$. In tal caso è* $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

ESEMPI

4.1. Consideriamo le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché $|A| = 3 \neq 0$ e $|B| = -1 \neq 0$, allora A e B sono invertibili. Determiniamo ora l'inversa per ciascuna delle matrici A e B.

Si ha : $A_{11} = 3$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$. Ne segue che $A^{-1} =$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Poiché $B_{11} = 0$, $B_{12} = 0$, $B_{13} = -1$, $B_{21} = 0$, $B_{22} = -1$, $B_{23} = 2$, $B_{31} = -1$, $B_{32} = -3$,

$B_{33} = 6$, allora $B^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$

5. REGOLA DI CRAMER

Sia S un sistema lineare di n equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \dots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases}$$

e sia A la matrice dei coefficienti delle incognite del sistema S.

Si prova che :

Proposizione 5.1. *Se* $|A| \neq 0$, *il sistema S ammette un'unica soluzione* $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, *dove*

$$y_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

essendo A_i *la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna con la colonna dei termini noti.*

Proposizione 5.2. *Se* $|A| = 0$ *e il sistema S è compatibile, allora esso ammette infinite soluzioni che si possono determinare col metodo di riduzione a gradini.*

Nell'ipotesi della Proposizione 5.1, il sistema S è detto *sistema di Cramer* e la regola indicata per determinarne l'unica soluzione è detta *regola di Cramer*.

Osserviamo esplicitamente che dalla Proposizione 5.1 segue immediatamente il seguente

Corollario 5.3 . *Se il sistema S ammette infinite soluzioni, allora* $|A| = 0$.

ESEMPI

5.1. Per ciascuno dei seguenti sistemi di Cramer, determiniamone l'unica soluzione:

$$S_1 = \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} , \quad S_2 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases} .$$

Consideriamo il sistema S_1.

Si ha : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$ e $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$. L'unica soluzione del sistema S_1 è allora $(y_1, y_2) = (4/3, -8/3)$.

Consideriamo ora il sistema S_2.

Si ha : $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$

e $|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$. L'unica soluzione del sistema S_2 è allora $(y_1, y_2, y_3) =$ $(2, -2, -3)$.

Nell'ipotesi della Proposizione 5.1, il sistema S è detto *sistema di Cramer* e la regola indicata per determinarne l'unica soluzione è detta *regola di Cramer*.

Osserviamo esplicitamente che dalla Proposizione 5.1 segue immediatamente il seguente

Corollario 5.3 . *Se il sistema S ammette infinite soluzioni, allora* $|A| = 0$.

ESEMPI

5.1. Per ciascuno dei seguenti sistemi di Cramer, determiniamone l'unica soluzione:

$$S_1 = \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}, \quad S_2 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

Consideriamo il sistema S_1.

Si ha : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$ e $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$. L'unica soluzione del sistema S_1 è allora $(y_1, y_2) = (4/3, -8/3)$.

Consideriamo ora il sistema S_2.

Si ha : $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ e $|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$. L'unica soluzione del sistema S_2 è allora $(y_1, y_2, y_3) = (2, -2, -3)$.

CAPITOLO IV

APPLICAZIONI LINEARI

1. DEFINIZIONE E PRIME PROPRIETA'

Siano V e V' due spazi vettoriali. Un'applicazione $f : V \rightarrow V'$ si dice *lineare* se sono verificate le seguenti due proprietà:

(1.1) $\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V,\ \ f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$;

(1.2) $\forall\ h \in \mathbb{R}$ e $\forall\ \mathbf{v} \in V,\ \ f(h\mathbf{v}) = h\, f(\mathbf{v})$.

ESEMPI

1.1. Proviamo che l'applicazione $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, x + y, y) \in \mathbb{R}^3$ è lineare.
Siano $\mathbf{v} = (x, y)$ e $\mathbf{w} = (x', y')$ due vettori di $\mathbb{R}^2$. E' $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x+x', y+y')$ e quindi si ha: $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(x+x', y+y') = (x+x', x+x'+y+y', y+y')$. Poiché $f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = f(x, y) + f(x', y') = (x, x+y, y) + (x', x'+ y', y') = (x+x', x+y+x'+y', y+y')$, allora $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e la (1.1) è così verificata.
Sia ora h un numero reale e sia $\mathbf{v} = (x, y)$ un elemento di $\mathbb{R}^2$. E' $h\mathbf{v} = h(x, y) = (hx, hy)$ e quindi si ha: $f(h\mathbf{v}) = f(hx, hy) = (hx, hx+hy, hy)$. Poiché $hf(\mathbf{v}) = h(x, x+y, y) = (hx, h(x+y), hy) = (hx, hx+hy, hy)$, allora $f(h\mathbf{v}) = h\, f(\mathbf{v})$ e la (1.2) è anch'essa verificata. L'applicazione f è dunque lineare.

1.2. Proviamo che l'applicazione $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, 0) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
Siano $\mathbf{v} = (x, y)$ e $\mathbf{w} = (x', y')$ due vettori di $\mathbb{R}^2$. E' $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x+x', y+y')$ e quindi si ha: $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(x+x', y+y') = (x + x', 0)$. Poiché $f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = (x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$, allora la (1.1) è verificata.

Sia ora h un numero reale e sia $\mathbf{v} = (x, y)$ un elemento di $\mathbb{R}^2$. E' $h\mathbf{v} = h(x, y) = (hx, hy)$ e quindi si ha: $f(h\mathbf{v}) = (hx, 0)$. Poiché $h\, f(\mathbf{v}) = h(x, 0) = (hx, 0)$, anche la (1.2) è verificata. L'applicazione f è dunque lineare.

1.3. Proviamo che l'applicazione $f : (x, y , z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (2x -1, x-3z) \in \mathbb{R}^2$ non è lineare.

Siano $\mathbf{v} = (x, y, z)$ e $\mathbf{w} = (x', y', z')$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. E' $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x+x', y+y', z+z')$ e quindi si ha: $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (2(x+x') - 1, x+x' - 3(z+z')) = (2x+2x'-1, x+x'-3z-3z')$. Risulta $f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = (2x-1, x-3z) + (2x'-1, x'-3z') = (2x+2x'-2, x-3z+x'-3z')$. Si ha quindi $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \neq f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$, per cui la (1.1) non è verificata. L'applicazione f non è dunque lineare.

1.4. Sia V uno spazio vettoriale. Indichiamo con id_V l'*applicazione identica* di V, ovvero l'applicazione di V in sé che associa ad ogni vettore di V se stesso:

$$id_V : \mathbf{v} \in V \rightarrow \mathbf{v} \in V.$$

Si verifica immmediatamente che id_V è lineare.

1.5. Siano V e V' due spazi vettoriali. Si dice *applicazione nulla* di V in V' l'applicazione f che associa ad ogni vettore di V il vettore nullo di V':

$$f : \mathbf{v} \in V \rightarrow \mathbf{0}_{V'} \in V'.$$

Si verifica immmediatamente che f è lineare.

1.6. Sia $A \in \mathbb{R}_{m,n}$. Identificando, per ogni n, il vettore numerico $(x_1 , x_2,\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con la matrice colonna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in R_{n,1}$, consideriamo l'applicazione

$F_A : X \in \mathbb{R}^n \to AX \in \mathbb{R}^m$. Usando le proprietà del prodotto righe per colonne tra matrici (cfr. Cap.I, Par.2), è facile provare che F_A è lineare.

1.7. Si prova facilmente che le seguenti applicazioni sono lineari:

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ x-z & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2};$$

$g : ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \to 2ax + b \in \mathbb{R}_1[x]$;

$h : (x, y , z) \in \mathbb{R}^3 \to (2x +y-5z,\ x-3z , x-y) \in \mathbb{R}^3$,

mentre le seguenti altre non lo sono:

$p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x^2, x - y, 0) \in \mathbb{R}^3$;

$$q : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2} \to \begin{pmatrix} a & a+b \\ 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}.$$

Un'applicazione lineare è detta anche *trasformazione lineare* oppure *omomorfismo.*

Proposizione 1.1. *Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Si ha:*

(i) $\forall h, k \in \mathbb{R}$ *e* $\forall v, w \in V$, $f(hv + kw) = h f(v) + k f(w)$;

(ii) $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_{V'}$.

Dimostrazione. Si ha: $f(h\mathbf{v} + k\mathbf{w})$ = (per la (1.1)) $f(h\mathbf{v}) + f(k\mathbf{w})$ = (per la (1.2)) $h f(\mathbf{v}) + k f(\mathbf{w})$. E' così provata la (i).

Poiché $\mathbf{0}_V = 0\, \mathbf{0}_V$, dalla (1.2) segue che $f(\mathbf{0}_V) = f(0\, \mathbf{0}_V) = 0\, f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_{V'}$. Si ha così la (ii).

La (i) della Proposizione 1.1 si estende ad una qualunque combinazione lineare di vettori di V. Si ha cioè :

(1.3) $\forall\, h_1, h_2,\ldots, h_t \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots, \mathbf{v}_t \in V$,

$$f(h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t) = h_1f(\mathbf{v}_1) + h_2f(\mathbf{v}_2) + \ldots + h_tf(\mathbf{v}_t).$$

Proposizione 1.2 . *Sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare. Si ha:*

(i) Se $S = \{ v_1, \ldots, v_t \} \subseteq V$ è un sistema linearmente dipendente, allora il sistema $f(S) = \{ f(v_1), \ldots, f(v_t) \} \subseteq V'$ è linearmente dipendente (f conserva la dipendenza lineare) ;

(ii) se $v \in L(S)$, allora $f(v) \in L(f(S))$.

Dimostrazione. (i) Per ipotesi esistono t scalari $h_1, h_2,\ldots, h_t$ non tutti nulli tali che $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}_V$. Applicando la f ad entrambi i membri si ottiene : $f(h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t) = f(\mathbf{0}_V) =$ (per la (ii) della Proposizione 1.1) $\mathbf{0}_{V'}$. Ne segue, per la (1.3), che $h_1f(\mathbf{v}_1) + h_2f(\mathbf{v}_2) + \ldots + h_tf(\mathbf{v}_t) = \mathbf{0}_{V'}$. Poiché gli scalari $h_1, h_2,\ldots, h_t$ non sono tutti nulli, i vettori $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_t)$ sono dipendenti.

(ii) Segue immediatamente dalla (1.3).

D'ora in avanti indicheremo con $\mathbf{0}$ sia il vettore nullo di V che quello di V'; il lettore capirà dal contesto a quale dei due vettori nulli ci si riferisce.

Proposizione 1.3. *Sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare. Per ogni sottospazio W di V, f(W) è un sottospazio di V'. Inoltre, se è $W = L(v_1, v_2, \ldots, v_t)$, risulta $f(W) = L(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_t))$.*

Dimostrazione. Essendo $W \neq \emptyset$, è $f(W) \neq \emptyset$. Cominciamo a provare che f(W) è stabile rispetto alle operazioni di V'. Siano $\mathbf{v}', \mathbf{w}' \in f(W)$. Esistono allora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ tali che $\mathbf{v}' = f(\mathbf{v})$ e $\mathbf{w}' = f(\mathbf{w})$. Poiché f è lineare, $\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{v} + \mathbf{w})$; inoltre, essendo W un sottospazio di V, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$. Il vettore $\mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ è dunque immagine mediante f di un vettore di W; da ciò $\mathbf{v}' + \mathbf{w}' \in f(W)$. Sia ora $h \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v}' \in f(W)$. Diciamo $\mathbf{v}$ un vettore di W tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$. Essendo f lineare, $h\mathbf{v}' = hf(\mathbf{v}) = f(h\mathbf{v})$; essendo W un sottospazio di V, $h\mathbf{v} \in W$. Ne segue che $h\mathbf{v}' \in f(W)$. Il sottoinsieme f(W) di V' è dunque stabile rispetto alle operazioni di V'. Per la Proposizione 3.1 del Capitolo II, f(W) è un sottospazio di V'.

Sia ora W generato da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$. I vettori $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_t)$ sono in f(W) e quindi anche tutte le loro combinazioni lineari sono in f(W) (cfr. Osservazione 3.1 del Cap. II). E' dunque $L(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_t)) \subseteq f(W)$. Per ogni vettore $\mathbf{v}' \in f(W)$, esiste un vettore $\mathbf{v} \in W$ tale che $\mathbf{v}' = f(\mathbf{v})$. Poiché $\mathbf{v} \in W = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t)$, dalla (ii) della Proposizione 1.2 segue che $\mathbf{v}' \in L(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_t))$. Si ha così che $f(W) \subseteq L(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_t))$. Dalla doppia inclusione segue $f(W) = L(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_t))$. L'asserto è così completamente provato.

2. NUCLEO E IMMAGINE

Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Poniamo:

$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ e $\mathrm{Im}\, f = f(V) = \{ f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V \}$.

Evidentemente è $\mathrm{Ker}\, f \subseteq V$ e $\mathrm{Im}\, f \subseteq V'$.

Proviamo che :

Proposizione 2.1. *Ker f è un sottospazio di V e Im f è un sottospazio di V'.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.3, Im f è un sottospazio di V'.

Per provare che Ker f è un sottospazio di V, cominciamo con l'osservare che, per la Proposizione 1.1, $\mathbf{0} \in \mathrm{Ker}\, f$ e quindi $\mathrm{Ker}\, f \neq \emptyset$. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathrm{Ker}\, f$. Proviamo che $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathrm{Ker}\, f$. Poiché f è lineare, $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$. Essendo d'altra parte $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$, allora $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{0}$ e dunque $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathrm{Ker}\, f$. Siano ora $h \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\, f$. Poiché f è lineare e $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, si ha che $f(h\mathbf{v}) = hf(\mathbf{v}) = h\mathbf{0} = \mathbf{0}$. E' dunque $h\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\, f$. Per la Proposizione 3.1 del Capitolo II, Ker f è un sottospazio di V.

I sottospazi Ker f e Im f sono detti rispettivamente *nucleo* e *immagine* dell'applicazione f.

Proposizione 2.2. *Se V è finitamente generabile e B = {* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$*} è una base di V, allora Im f =* $L(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n))$.

Dimostrazione. Poiché per ipotesi è $V = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, l'asserto segue subito dalla Proposizione 1.3.

ESEMPI

2.1. Determiniamo nucleo e immagine dell'applicazione lineare dell'Esempio 1.1.
$\text{Ker } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x, x+y, y) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, x+y = 0, y = 0\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y = 0\} = \{(0, 0)\} = \{\mathbf{0}\}$.
Per la Proposizione 2.2, $\text{Im } f = L(f(1, 0), f(0, 1)) = L((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.

2.2. Determiniamo nucleo e immagine dell'applicazione lineare dell'Esempio 1.2.
$\text{Ker } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, 0) = (0,0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \} = \{(0, y), \text{con } y \in \mathbb{R}\}$
$= L((0, 1))$.
Per la Proposizione 2.2, $\text{Im } f = L(f(1, 0), f(0, 1)) = L((1, 0), (0, 0)) = L((1, 0))$.

2.3. Determiniamo nucleo e immagine dell'applicazione lineare dell'Esempio 1.4.
$\text{Ker } id_V = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$.
Evidentemente, $\text{Im } id_V = V$.

2.4. Determiniamo nucleo e immagine dell'applicazione lineare dell'Esempio 1.5.
E' facile rendersi conto che Ker f = V ed Im f = $\{\mathbf{0}\}$.

2.5. Determiniamo nucleo e immagine dell'applicazione lineare dell'Esempio 1.6.

$\mathrm{Ker}\, F_A = \{ X \in \mathbb{R}^n : AX = 0 \}$ (qui 0 indica la matrice nulla di tipo $[m, 1]$). $\mathrm{Ker}\, F_A$ è dunque il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo in n incognite $AX = 0$.

Poniamo ora : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$. Per la Proposizione 2.2, $\mathrm{Im}\, F_A = L(F_A(X_1), F_A(X_2), \ldots, F_A(X_n))$. Poiché $F_A(X_1)$ coincide con la prima colonna della matrice A, $F_A(X_2)$ coincide con la seconda colonna di A , e così via fino ad $F_A(X_n)$ che coincide con l'n-ma colonna di A, allora $\mathrm{Im}\, F_A$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.

Proposizione 2.3. *Si ha :*

(i) f è suriettiva $\Leftrightarrow$ *Im f = V' ;*

(ii) f è iniettiva $\Leftrightarrow$ *Ker f = {0}.*

Dimostrazione. La (i) non è altro che la definizione di suriettività. Proviamo allora la (ii). Sia dunque f iniettiva. Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ è un vettore di V, allora $f(\mathbf{v}) \neq f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{v} \notin \mathrm{Ker}\, f$. Ne segue che $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$.

Viceversa, supponiamo $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono due vettori distinti di V, proviamo che $f(\mathbf{v}) \neq f(\mathbf{w})$. Supponiamo, per assurdo, $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w})$. Si ha $f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ da cui, per la linearità di f, $f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Il vettore $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ appartiene dunque a Ker f. Essendo $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$, è $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, un assurdo essendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$. L'asserto è così completamente provato.

Proposizione 2.4. *Sia* $f : V \to V'$ *un'applicazione lineare iniettiva. Se* $S = \{ v_1, \ldots, v_t \} \subseteq V$ *è un sistema indipendente, allora il sistema* $f(S) = \{ f(v_1), \ldots, f(v_t) \} \subseteq V'$ *è indipendente (f conserva l'indipendenza lineare).*

Dimostrazione. Sia $h_1 f(\mathbf{v}_1) + h_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots + h_t f(\mathbf{v}_t) = \mathbf{0}$. Proviamo che tutti gli scalari sono uguali a zero. Poiché f è lineare, $h_1 f(\mathbf{v}_1) + h_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots + h_t f(\mathbf{v}_t) = f(h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$. Ne segue, essendo f iniettiva, che $h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$. Poiché $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_t$ sono indipendenti, allora $h_1 = \ldots. = h_t = 0$.

Concludiamo il presente paragrafo provando il seguente

Teorema 2.5. *Sia $f : V_n \to V'$ un'applicazione lineare. Si ha :*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n.$$

Dimostrazione. Se Ker f = $\{\mathbf{0}\}$, per la Proposizione 2.3 f è iniettiva. Dalle Proposizioni 2.2 e 2.4 segue allora che ogni base di V_n si trasforma mediante f in un sistema indipendente di generatori di Im f, cioè in una base di Im f. Ne segue che dim Im f = n, cioè l'asserto.

Sia ora Ker f $\neq \{\mathbf{0}\}$. Detta $B_{ker} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_t\}$ una base di Ker f , completiamo B_{ker} in una base $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{t+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ di V_n. Per la Proposizione 2.2, Im f $= L(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_t), f(\mathbf{v}_{t+1}), \ldots, f(\mathbf{v}_n)) = L(f(\mathbf{v}_{t+1}), \ldots, f(\mathbf{v}_n))$, essendo $f(\mathbf{v}_1) = \ldots = f(\mathbf{v}_t) = \mathbf{0}$. Proviamo ora che i vettori $f(\mathbf{v}_{t+1}), \ldots, f(\mathbf{v}_n)$, che generano Im f, sono indipendenti. Sia $h_{t+1} f(\mathbf{v}_{t+1}) + \ldots + h_n f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$. Dalla linearità di f segue che $f(h_{t+} \mathbf{v}_{t+1} + \ldots + h_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$. Il vettore $h_{t+1}\mathbf{v}_{t+1} + \ldots + h_n\mathbf{v}_n$ appartiene quindi a Ker f; esso è allora combinazione lineare dei vettori di B_{ker}. Si ha pertanto $h_{t+1}\mathbf{v}_{t+1} + \ldots + h_n\mathbf{v}_n = k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_t\mathbf{v}_t$ per opportuni scalari $k_1, \ldots, k_t$, da cui $h_{t+1}\mathbf{v}_{t+1} + \ldots + h_n\mathbf{v}_n - k_1\mathbf{v}_1 - \ldots - k_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$. Essendo $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{t+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ indipendenti, tutti gli scalari sono nulli; in particolare è $h_{t+1} = \ldots = h_n = 0$, per cui il sistema $\{f(\mathbf{v}_{t+1}), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è indipendente e dunque è una base di Im f . Ne segue che dim Im f = n – t = n – dim Ker f, cioè l'asserto.

3. ISOMORFISMI

Un'applicazione lineare $f : V \to V'$ è detta *isomorfismo* se **essa è biettiva** (ovvero iniettiva e suriettiva). E' facile provare che, se $f : V \to V'$ è un isomorfismo, anche l'applicazione inversa $f^{-1} : V' \to V$ è un isomorfismo.

Due spazi vettoriali si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo tra essi.

ESEMPI

3.1. Sia V uno spazio vettoriale. L'applicazione identica id_V di V è lineare, iniettiva e suriettiva. Essa è dunque un isomorfismo.

3.2. Consideriamo l'applicazione $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2} \to (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. E' facile verificare che f è lineare. Determiniamo ora il nucleo e l'immagine di f. Si ha :

$\text{Ker } f = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2} : (a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0) \} = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \} = \{\mathbf{0}\}$. Per la Proposizione 2.3, f è iniettiva. Osserviamo ora che, essendo $\dim \mathbb{R}_{2,2} = 4$ e $\dim \text{Ker } f = 0$, dal Teorema 2.5 segue che $4 = 0 + \dim \text{Im } f$. Si ha allora che $\dim \text{Im } f = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ e dunque, per la Proposizione 6.7 del Cap. II, $\text{Im } f = \mathbb{R}^4$, per cui la f è suriettiva. L'applicazione f è allora un isomorfismo.

?

3.3. Consideriamo l'omomorfismo $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (2x+y-z, y+z, 3z) \in \mathbb{R}^3$. Per la Proposizione 2.2, $\text{Im } f = L(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = L((2, 0, 0), (1, 1, 0), (-1, 1, 3))$. Poiché i tre vettori che generano Im f sono indipendenti, si ha che $\dim \text{Im } f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$; da ciò segue che $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$ e quindi f è suriettiva. Dal Teorema 2.5 segue allora che $\dim \text{Ker } f = 0$, per cui $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$. La f è quindi anche iniettiva, per cui essa è un isomorfismo.

3.4. ***Isomorfismo coordinato associato ad un riferimento.***

Sia V_n uno spazio vettoriale ed $R = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ un suo riferimento. Consideriamo l'applicazione c_R di V_n in $\mathbb{R}^n$ che ad ogni vettore $\mathbf{v} \in V_n$ associa la n-pla ordinata delle sue componenti in R :

$$c_R : \mathbf{v} = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + \dots + h_n\mathbf{e}_n \in V_n \rightarrow (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Si prova immmediatamente che l'applicazione c_R è lineare.

Determiniamo il nucleo e l'immagine di c_R. Si ha :

$\mathrm{Ker}\, c_R = \{ \mathbf{v} \in V_n : c_R(\mathbf{v}) = (0, 0, \dots, 0)\} = \{\mathbf{0}\}$;

$\mathrm{Im}\, c_R = L(c_R(\mathbf{e}_1), c_R(\mathbf{e}_2), \dots, c_R(\mathbf{e}_n)) = L((1, 0,\dots,0), (0, 1,\dots,0),\dots,(0, 0,\dots, 1)) = \mathbb{R}^n$.

Da ciò segue che l'applicazione c_R è sia iniettiva che suriettiva e quindi che essa è un isomorfismo tra V_n ed $\mathbb{R}^n$. Tale isomorfismo è detto *isomorfismo coordinato* associato al riferimento R (o anche *coordinazione* di V_n associata ad R).

Dall'Esempio 3.4 segue che :

Osservazione 3.1. *Ogni spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Proposizione 3.1 . *Sia $f : V_n \rightarrow V_m'$ un isomorfismo. Si ha :*

(i) f conserva la dipendenza e l'indipendenza lineare;

(ii) per ogni sistema S_W di generatori di un sottospazio W di V_n, $f(S_W)$ è un sistema di generatori del sottospazio f(W) di V_m';

(iii) per ogni base B_W di un sottospazio W di V_n, $f(B_W)$ è una base del sottospazio f(W) di V_m';

(iv) per ogni sottospazio W di V_n, dim W = dim f(W);

(v) per ogni base B di V_n, f(B) è una base di V_m' e dim V_n = dim V_m'.

Dimostrazione. La (i) segue immediatamente dalle Proposizioni 1.2 e 2.4, essendo f una applicazione lineare iniettiva. La (ii) è vera per la Proposizione 1.3.

Per provare la (iii), consideriamo una base $B_W = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\}$ di W. Per la (ii), $f(B_W) = \{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_t)\}$ genera f(W); inoltre, per la (i), i vettori $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_t)$ sono indipendenti. Si ha allora che $f(B_W)$ è una base di f(W).

Le (iv) e (v) seguono immediatamente dalla (iii).

Poiché, per ogni isomorfismo f, anche f^{-1} è un isomorfismo, dalla Proposizione 3.1 segue che lo studio di uno spazio vettoriale (dipendenza e indipendenza lineare, sottospazi e loro dimensione, basi) può essere fatto utilizzando uno spazio vettoriale ad esso isomorfo. In particolare, poiché ogni spazio vettoriale di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{R}^n$ (cfr. Osservazione 3.1), allora $\mathbb{R}^n$ costituisce un modello (comodo da utilizzare) di ogni spazio vettoriale V_n.

ESEMPI

3.5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ sia $H = L(x^3+2x, x-1, 2x^3+3x+1, x^2+3x-2)$. Determiniamo una base e la dimensione del sottospazio H.

Consideriamo il riferimento $R = (x^3, x^2, x, 1)$ di $\mathbb{R}_3[x]$ e la coordinazione ad esso associata:

$$c_R : ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] \to (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

L'immagine di H mediante l'isomorfismo c_R è il sottospazio H' = L((1, 0, 2, 0), (0, 0,1, -1), (2, 0, 3, 1), (0,1 ,3, -2)) di $\mathbb{R}^4$. Ricordando che l'applicazione inversa di c_R è anch'essa un isomorfismo, per determinare una base di H basterà determinare una base di H' (cfr. Proposizione 3.1). Scriviamo allora i vettori che generano H' come righe di una matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; determiniamo poi una matrice a gradini ad essa equivalente : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per l'Osservazione 8.1 del Capitolo II, le righe non nulle della matrice A costituiscono una base di H'. Ne segue che i polinomi $c_R^{-1}(1, 0, 2, 0) = x^3 + 2x$, $c_R^{-1}(0,1, 3, -2) = x^2 + 3x - 2$ e $c_R^{-1}(0, 0, 1, -1) = x - 1$ costituiscono una base di H che ha quindi dimensione 3.

3.6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{2,2}$ consideriamo il sistema di vettori $S = \{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\}$. Determiniamo la dimensione del sottospazio L(S). Considerato il riferimento naturale R di $\mathbb{R}_{2,2}$, sia c_R l'isomorfismo coordinato ad esso associato:

$$c_R : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2} \to (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

L'isomorfismo c_R trasforma il sottospazio L(S) di $\mathbb{R}_{2,2}$ nel sottospazio W = L((2, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 3), (4, 1, -1, -1)) di $\mathbb{R}^4$ e quindi dimL(S) = dimW (cfr. Proposizione 3.1). Poiché, come è facile verificare, dimW = 2, allora dimL(S) = 2.

4. MATRICI E APPLICAZIONI LINEARI

Siano V_n e V_m' due spazi vettoriali. Proviamo che:

Proposizione 4.1. *Un'applicazione lineare $f : V_n \to V_m'$ è determinata quando sono noti i corrispondenti dei vettori di una base.*

Dimostrazione. Sia $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base di V_n. Vogliamo provare che la conoscenza dei vettori $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$, ..., $f(\mathbf{e}_n)$ è sufficiente per conoscere il corrispondente in f di ogni vettore di V_n. Sia dunque $\mathbf{v} = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + \dots + h_n\mathbf{e}_n \in V_n$. Poiché f è lineare, dalla (1.3) segue che $f(\mathbf{v}) = h_1 f(\mathbf{e}_1) + h_2 f(\mathbf{e}_2) + \dots + h_n f(\mathbf{e}_n)$ e dunque $f(\mathbf{v})$ è determinato.

Sia $f : V_n \to V_m'$ un'applicazione lineare e siano $R = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ ed $R' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \dots, \mathbf{e}_m')$ due riferimenti rispettivamente di V_n e V_m'. Sia inoltre $f(\mathbf{e}_1) = a_{11}\,\mathbf{e}_1' + a_{21}\,\mathbf{e}_2' + \dots + a_{m1}\,\mathbf{e}_m'$, $f(\mathbf{e}_2) = a_{12}\,\mathbf{e}_1' + a_{22}\,\mathbf{e}_2' + \dots + a_{m2}\,\mathbf{e}_m'$, ..., $f(\mathbf{e}_n) = a_{1n}\,\mathbf{e}_1' + a_{2n}\,\mathbf{e}_2' + \dots + a_{mn}\,\mathbf{e}_m'$. Per la Proposizione 4.1, il corrispondente $f(\mathbf{v})$ di un vettore $\mathbf{v}$ di V_n è noto non appena si conoscono i corrispondenti in f dei vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Ne segue che per conoscere $f(\mathbf{v})$ basta conoscere gli scalari a_{ij} ($i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$). Costruiamo con tali scalari una matrice A ponendo nella prima colonna le componenti in R' di $f(\mathbf{e}_1)$, nella seconda quelle di $f(\mathbf{e}_2)$, e così via fino alla colonna n-esima in cui poniamo le componenti in R' di $f(\mathbf{e}_n)$. E' dunque

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La matrice A di tipo [m, n] così costruita è detta *matrice associata ad f nei riferimenti R ed R'*. Essa sarà talvolta denotata con $M_{R,R'}(f)$. Per quanto appena detto, la conoscenza della matrice associata ad f in una coppia di riferimenti permette di determinare completamente la f. In particolare, per la Proposizione 2.2, è possibile determinare Imf a partire dalla matrice A.

Se $V_m' = V_n$, l'applicazione lineare f di V_n in sé è detta *endomorfismo* di V_n. In tal caso, se è anche R' = R, parleremo semplicemente di *matrice associata ad f nel riferimento R*.

ESEMPI

4.1. Consideriamo l'omomorfismo $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (2x - 3y, -x + y, 0) \in \mathbb{R}^3$. Considerato il riferimento $R = ((1, 1), (2, -1))$ di $\mathbb{R}^2$ e il riferimento $R' = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$, determiniamo la matrice A associata ad f nei riferimenti R ed R'. Si ha :

$f(1, 1) = (-1, 0, 0) = 0(0, 1, 1) -1(1, 0, 1) + 1(0, 0, 1)$,

$f(2, -1) = (7, -3, 0) = -3(0, 1, 1) + 7(1, 0, 1) - 4(0, 0, 1)$.

Ne segue che $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

4.2. Consideriamo l'applicazione lineare dell'esempio 4.1. Fissato il riferimento naturale sia in $\mathbb{R}^2$ che in $\mathbb{R}^3$, determiniamo la matrice B associata ad f in tali riferimenti. Si ha :

$f(1, 0) = (2, -1, 0) = 2(1, 0, 0) - 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$,

$f(0, 1) = (-3, 1 ,0) = -3(1, 0 ,0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$,

Ne segue che $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata nei riferimenti $R = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ ed $R' = ((0, 2), (-1, 1))$ dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Determiniamo $f(1, 0, -1)$.

Dalla definizione di matrice associata ad f in R ed R' segue che:

$f(1, 0, 0) = 1(0, 2) + 3(-1, 1) = (-3, 5)$,

$f(1, 1, 0) = 2(0, 2) + 1(-1, 1) = (-1, 5)$,

$f(1, 1, 1) = 0(0, 2) + 1(-1, 1) = (-1, 1)$.

Poiché inoltre è $(1, 0, -1) = 1(1, 0, 0) +1(1, 1, 0) - 1(1, 1, 1)$, allora si ha:

$f(1, 0, -1) = 1f(1, 0, 0) + 1f(1, 1, 0) - 1f(1, 1, 1) = 1(-3, 5) + 1(-1, 5) - 1(-1, 1) = (-3, 9)$.

Determiniamo ora $f(2, -1, -2)$. Poiché risulta $(2, -1, -2) = 3(1, 0, 0) + 1(1, 1, 0) - 2(1, 1, 1)$, allora si ha:

$f(2, -1, -2) = 3f(1, 0, 0) + 1f(1, 1, 0) - 2f(1, 1, 1) = 3(-3, 5) + 1(-1, 5) - 2(-1, 1) = (-8, 18)$.

Determiniamo infine $f(x, y, z)$, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Poiché $(x, y, z) = (x-y)(1, 0, 0) + (y-z)(1, 1, 0) + z(1, 1, 1)$, si ha:

$f(x, y, z) = (x-y)(-3,5) + (y-z)(-1,5) + z(-1,1) = (-3x + 2y, 5x - 4z)$.

4.4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ rappresentato nel riferimento $R = ((0, 1), (1, 1))$ dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determiniamo Imf.

Dalla definizione di matrice associata ad f in R segue che

$f(0, 1) = 1(0, 1) + 3(1, 1) = (3, 4)$;

$f(1, 1) = 2(0, 1) + 1(1, 1) = (1, 3)$.

Per la Proposizione 2.2 è allora $\text{Imf} = L((3, 4), (1, 3)) = \mathbb{R}^2$.

D'ora in avanti, quando sarà utile, identificheremo il vettore numerico $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con la matrice colonna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n,1}$ così come è stato fatto nell'Esempio 1.6.

Osservazione 4.1. Sia $A \in \mathbb{R}_{m,n}$. Consideriamo l'applicazione lineare $F_A : X \in \mathbb{R}^n \rightarrow AX \in \mathbb{R}^m$. E' facile verificare che la matrice associata ad F_A nei riferimenti naturali di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ è proprio A.

Enunciamo ora un' importante proposizione di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 4.2. *Sia $f : V_n \rightarrow V_m'$ un'applicazione lineare e siano R un riferimento di V_n ed R' un riferimento di V_m'. Detta X la matrice colonna delle componenti in R di un vettore $\mathbf{v} \in V_n$ ed X' la matrice colonna delle componenti di f(v) in R', si ha:*

(i) se $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ è la matrice associata ad f nei riferimenti R ed R', allora $X' = AX$, $\forall\, v \in V_n$;

(ii) se $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ è una matrice tale che, $\forall\, v \in V_n$, $X' = AX$, allora A è la matrice associata ad f nei riferimenti R ed R'.

Osservazione 4.2. Sia $f : V_n \rightarrow V_m'$ un'applicazione lineare. Fissato un riferimento R in V_n e un riferimento R' in V_m', diciamo A la matrice associata ad f nei riferimenti R ed R'. Dalla Proposizione precedente segue che :

$$\mathbf{v} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow AX = 0,$$

avendo indicato con X la matrice colonna delle componenti di **v** in R.

ESEMPI

4.5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata nei riferimenti $R = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ ed $R' = ((0, 5), (-1, 1))$ dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determiniamo Ker f .

Per l'Osservazione 4.2, cominciamo col risolvere il sistema omogeneo S = $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$ avente A come matrice dei coefficienti. Un sistema a gradini ad esso equivalente è il sistema $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ \quad -y - 7z = 0 \end{cases}$ il cui insieme delle soluzioni è $\{(10z, -7z, z), z \in \mathbb{R}\} = L((10, -7, 1))$. Poiché le soluzioni del sistema S sono tutte e sole le componenti in R dei vettori del nucleo di f, allora Ker f = $\{10z(1, 0, 1) - 7z(1, 1, 0) + z(0, 1, 1), z \in \mathbb{R}\} = \{(3z, -6z, 11z), z \in \mathbb{R}\}$ = L ((3, -6, 11)).

Osserviamo che avremmo potuto ottenere la base {(3, -6, 11) di Ker f a partire dalla base {(10, -7, 1)} dello spazio delle soluzioni del sistema S utilizzando l'isomorfismo coordinato di $\mathbb{R}^3$ associato al riferimento R. Si ha infatti (3, -6, 11) = 10(1, 0, 1) – 7(1, 1, 0) + (0, 1, 1).

4.6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata nel riferimento naturale R =((1, 0), (0, 1)) dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 6 & -24 \end{pmatrix}$. Determiniamo Ker f .

Risolviamo il sistema omogeneo S = $\begin{cases} 3x - 12y = 0 \\ 6x - 24y = 0 \end{cases}$ avente A come matrice dei coefficienti. Tale sistema è ovviamente equivalente all'unica equazione $3x - 12y = 0$ il cui insieme delle soluzioni è $\{(4y, y), y \in \mathbb{R}\} = L((4,1))$. Le soluzioni del sistema S sono tutte e sole le componenti dei vettori del nucleo di f. Poiché una base dello spazio delle soluzioni di S è {(4, 1)}, allora una base di Ker f è 4 (1, 0) + 1 (0, 1) = (4, 1). Ne segue che Ker f = L ((4,1)).

Sia ora f un endomorfismo dello spazio vettoriale V_n di dimensione $n \geq 1$. Detti $R = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ed $R' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ due riferimenti di V_n, vogliamo determinare la relazione che sussiste tra le matrici A ed A’ associate ad f rispettivamente in R e in R’. A tale scopo, premettiamo la seguente

Proposizione 4.3. *La matrice B di passaggio da R' ad R è invertibile.*

Dimostrazione. Ricordiamo (cfr. Capitolo II, Paragrafo 7) che le colonne di B sono i vettori numerici delle componenti in R dei vettori $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$. Poiché $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ sono indipendenti, per l'isomorfismo coordinato associato ad R le colonne di B sono indipendenti. Ne segue, per la Proposizione 3.3 del Capitolo III, che $| B | \neq 0$. Per la Proposizione 4.1 del Capitolo III, B è invertibile.

Si prova inoltre che :

Proposizione 4.4. *Se B è la matrice di passaggio da R' ad R, allora B^{-1} è la matrice di passaggio da R ad R’.*

Siano A e A’ due matrici quadrate di ordine n. Si dice che A è *simile* ad A’ se esiste una matrice invertibile P di ordine n tale che $P^{-1} A P = A'$. Osserviamo che:

- ogni matrice quadrata A è simile a se stessa (detto n l’ordine di A, basta scegliere come matrice P la matrice identica I_n);
- se A è simile ad A’, allora A’ è simile ad A (infatti, se $P^{-1} A P = A'$, allora $A = P A' P^{-1}$).

Si può inoltre provare che

- se A è simile ad A’ ed A’ è simile ad A” , allora A è simile ad A”.

Per quanto detto, la relazione di similitudine tra matrici quadrate dello stesso ordine è una relazione di equivalenza.

Siamo ora in grado di provare che :

Proposizione 4.5. *Sia f un endomorfismo di V_n e siano R ed R' due riferimenti di V_n. Detta A la matrice associata ad f in R ed A' la matrice associata ad f in R', allora A ed A' sono simili. Precisamente,* $A' = B^{-1} A B$ *, dove B è la matrice di passaggio da R' ad R.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v} \in V_n$. Indichiamo con X la matrice colonna delle componenti di **v** in R e con X' la matrice colonna delle componenti di **v** in R'; analogamente, indichiamo con Y ed Y' le matrici colonna delle componenti di f(**v**) rispettivamente in R ed R'. Essendo B la matrice di passaggio da R' ad R, per la (7.2) del Capitolo II si ha :

(4.1) $$X = BX', \quad Y = BY'.$$

Per la (i) della Proposizione 4.2 è $Y = AX$ da cui, per la (4.1), $BY' = A(BX') = ABX'$. Moltiplicando a sinistra per B^{-1} entrambi i membri di quest'ultima relazione, si ha : $B^{-1}(BY') = B^{-1}(ABX')$ cioè $(B^{-1}B)Y' = (B^{-1}AB)X'$ da cui, essendo $B^{-1}B = I_n$, si ha $Y' = (B^{-1}AB)X'$. Per la (ii) della Proposizione 4.2 è allora $A' = B^{-1}AB$.

CAPITOLO V

DIAGONALIZZAZIONE DI ENDOMORFISMI E MATRICI

1. DEFINIZIONI E PRIME PROPRIETA'

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matrice quadrata reale di ordine n. Il polinomio p(t) nell'indeterminata t ottenuto calcolando formalmente il determinante della matrice $A - tI_n = \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$ è detto *polinomio caratteristico di A.*

Proposizione 1.1. *Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Siano A ed A' due matrici simili. Risulta allora $A' = P^{-1}AP$, con P matrice invertibile di ordine n. Si ha : $| A' - t I_n | = | P^{-1}AP - t I_n | = | P^{-1}AP - t P^{-1}P | = | P^{-1}AP - P^{-1} (t I_n)P | = | P^{-1}(A - tI_n)P | = | P^{-1}| | A - tI_n| | P | = | A - tI_n|$, essendo $| P^{-1}| | P | = 1$.

L'equazione $\det(A - tI_n) = 0$ è detta *equazione caratteristica di A.* Si verifica facilmente che essa è un'equazione algebrica di grado n avente come termine noto $| A |$.

Sia V_n uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$ e sia $f : V_n \rightarrow V_n$ un endomorfismo. Se A è la matrice associata ad f in un riferimento R, il polinomio caratteristico di A è detto anche *polinomio caratteristico di f.* La definizione è ben posta in quanto non dipende dal riferimento R considerato (infatti, se A' è la matrice associata ad f in un riferimento R', essa è simile ad A per la Proposizione 4.5 del Cap. IV e dunque ha lo stesso polinomio caratteristico di A per la Proposizione 1.1). L'equazione $\det(A - tI_n) = 0$ è detta *equazione caratteristica di f.*

L'endomorfismo f è detto *diagonalizzabile* se esiste un riferimento R di V_n tale che la matrice associata ad f in R è una matrice *diagonale*, cioè una matrice quadrata in cui tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale sono uguali a zero.

Una matrice quadrata A è detta *diagonalizzabile* se è simile ad una matrice diagonale.

Proviamo che :

Proposizione 1.2. *Se f è un endomorfismo diagonalizzabile di V_n, allora ogni matrice associata ad f è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Sia A la matrice associata ad f in un riferimento R. Poiché f è diagonalizzabile, esiste un riferimento R' tale che la matrice associata ad f in R' è una matrice diagonale D. Dalla Proposizione 4.5 del Capitolo IV segue che $D = B^{-1} A B$, dove B è la matrice di passaggio da R' ad R. La matrice A è dunque diagonalizzabile.

Si prova che il risultato espresso dalla Proposizione 1.2 si può invertire. Vale pertanto la seguente

Proposizione 1.3. *Se f è un endomorfismo di V_n ed A è la matrice associata ad f in un fissato riferimento, allora f è diagonalizzabile se, e solo se, lo è A.*

La Proposizione 1.3 mostra che il problema della diagonalizzazione di un endomorfismo è strettamente collegato a quello della diagonalizzazione di una matrice.

2. DIAGONALIZZAZIONE DI UN ENDOMORFISMO

In questo paragrafo V_n denoterà uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$ ed f un suo endomorfismo.

Un vettore $\mathbf{v} \in V_n$ è detto *autovettore* di f di *autovalore* $h \in \mathbb{R}$ se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $f(\mathbf{v}) = h\,\mathbf{v}$.

Proviamo che :

Proposizione 2.1. *Sia v un autovettore di f. Esiste un solo $h \in \mathbb{R}$ tale che h è autovalore di v.*

Dimostrazione. Se $f(\mathbf{v}) = h\,\mathbf{v} = k\,\mathbf{v}$, allora $h\,\mathbf{v} - k\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, da cui $(h - k)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Essendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, ne segue $h = k$.

Proposizione 2.2. *L'endomorfismo f è diagonalizzabile se, e solo se, esiste una base di V_n formata da autovettori di f.*

Dimostrazione. Sia f diagonalizzabile. Esiste quindi un riferimento $R = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ di V_n tale che la matrice associata ad f in R è una matrice diagonale

$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$. Per definizione di matrice associata, le colonne di D sono, nell'ordine, le componenti in R dei vettori $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$. Si ha allora :

$$f(\mathbf{e}_1) = d_1\mathbf{e}_1 + 0\,\mathbf{e}_2 + \dots + 0\,\mathbf{e}_n = d_1\mathbf{e}_1,$$

$$f(\mathbf{e}_2) = 0\,\mathbf{e}_1 + d_2\mathbf{e}_2 + \dots + 0\,\mathbf{e}_n = d_2\mathbf{e}_2,$$

$$f(\mathbf{e}_n) = 0\,\mathbf{e}_1 + 0\,\mathbf{e}_2 + \dots + d_n\mathbf{e}_n = d_n\mathbf{e}_n.$$

I vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ sono dunque autovettori di f di autovalore, rispettivamente, d_1, d_2, ... , d_n. Viceversa, sia $R = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ un riferimento di V_n formato da autovettori di f. Si ha allora, per ogni $i = 1, \dots, n$, $f(\mathbf{e}_i) = h_i\mathbf{e}_i$, essendo h_i l'autovalore di $\mathbf{e}_i$. La matrice associata ad f in R è quindi $\begin{pmatrix} h_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & h_2 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & h_n \end{pmatrix}$, che è una matrice diagonale; f è dunque diagonalizzabile.

Vediamo ora come determinare gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo. A tale proposito sussiste la seguente

Proposizione 2.3. *Sia R un riferimento di V_n e sia $A = (a_{ij})$ la matrice associata ad f in R. Gli autovalori di f sono tutte e sole le soluzioni reali dell'equazione caratteristica di f. Le componenti in R degli autovettori di f aventi un fissato autovalore h sono le soluzioni non banali del sistema omogeneo $(A - h\,I_n)\,X = 0$.*

Dimostrazione. Sia h un autovalore di f. Un vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f di autovalore h, se, e solo se, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $f(\mathbf{v}) = h\,\mathbf{v}$. Denotiamo con $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$ la matrice delle componenti di $\mathbf{v}$ in R. Essendo AZ la matrice delle componenti di $f(\mathbf{v})$ in R (cfr. Proposizione 4.2 del Capitolo IV) ed hZ la matrice delle componenti di $h\mathbf{v}$ in R, allora $\mathbf{v}$ è autovettore di autovalore h, se, e solo se $A\,Z = h\,Z$. Poiché

$A\,Z = h\,Z \Leftrightarrow A\,Z - h\,Z = 0 \Leftrightarrow A\,Z - h\,I_n\,Z = 0 \Leftrightarrow (A - h\,I_n)\,Z = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a_{11} - h)\,z_1 + a_{12}\,z_2 + \ldots + a_{1n}\,z_n = 0 \\ a_{21}\,z_1 + (a_{22} - h)\,z_2 + \ldots + a_{2n}\,z_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}\,z_1 + a_{n2}\,z_2 + \ldots + (a_{nn} - h)\,z_n = 0 \end{cases}$$

, allora **v** è autovettore di autovalore h se, e solo se, le sue componenti in R sono una soluzione non banale del sistema

omogeneo $S = \begin{cases} (a_{11} - h)\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0 \\ a_{21}\,x_1 + (a_{22} - h)\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + (a_{nn} - h)\,x_n = 0 \end{cases}$. Ne segue che il sistema omogeneo S non ammette solo la soluzione banale; esso ammette quindi infinite soluzioni e dunque, per il Corollario 5.3 del Capitolo III, $\det(A - h\,I_n) = 0$. Si ha dunque che h è una radice reale dell'equazione $\det(A - t\,I_n) = 0$, equazione caratteristica di f.

Viceversa, se h è una radice reale dell'equazione $\det(A - t\,I_n) = 0$, cioè se $\det(A - h\,I_n) = 0$, allora il sistema omogeneo S ammette, per la Proposizione 5.2 del Capitolo III, una soluzione non banale Z. Poiché $(A - h\,I_n)\,Z = 0$ equivale a $AZ = h\,Z$, allora Z è la matrice delle componenti in R di un autovettore avente h come autovalore. L'asserto è così completamente provato.

Sia h un autovalore di f. L'insieme $V(h) = \{ \mathbf{v} \in V_n : f(\mathbf{v}) = h\,\mathbf{v} \}$, formato dagli autovettori di f di autovalore h e dal vettore nullo, è detto *autospazio* di f relativo all'autovalore h.

Proposizione 2.4. Si ha :

(*i*) *Per ogni autovalore h di f, l'autospazio V(h) è sottospazio di V_n e dim V(h) ≥ 1;*

(ii) per ogni autovalore h di f, V(h) è isomorfo allo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(A - h\, I_n)\, X = 0$, *essendo A la matrice associata ad f in un riferimento R;*

(iii) autospazi distinti si intersecano nel solo vettore nullo.

Dimostrazione. (i) Per sua stessa definizione V(h) non è vuoto. Siano ora $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in V(h). Il vettore $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V(h)$ in quanto $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = h\,\mathbf{v} + h\,\mathbf{w} = h(\mathbf{v} + \mathbf{w})$. Analogamente si prova che, per ogni $k \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v} \in V(h)$, $k\,\mathbf{v} \in V(h)$. L'autospazio V(h) è dunque un sottospazio. Poiché in V(h) esistono vettori non nulli (gli autovettori di autovalore h), $V(h) \neq \{\mathbf{0}\}$, per cui $\dim V(h) \geq 1$.

(ii) Sia W lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(A - h\, I_n)\, X = 0$. Tenendo conto della Proposizione 2.3, è immediato verificare che l'applicazione che ad ogni vettore $\mathbf{v} \in V(h)$ associa la n-pla delle sue componenti in R è un isomorfismo tra V(h) e W.

(iii) Siano V(h) e V(k) due autospazi di f, con $h \neq k$. Se $\mathbf{v} \in V(h) \cap V(k)$, $\mathbf{v}$ è necessariamente il vettore nullo, altrimenti sarebbe un autovettore relativo a due autovalori distinti, contro la Proposizione 2.1.

Osserviamo esplicitamente che, se 0 è un autovalore di f, allora il suo autospazio, essendo formato dai vettori $\mathbf{v}$ tali che $f(\mathbf{v}) = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, coincide con Ker f.

Proviamo ora che :

Proposizione 2.5. *Se v e w sono autovettori relativi ad autovalori distinti, allora v e w sono indipendenti.*

Dimostrazione. Diciamo h e k gli autovalori di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, rispettivamente. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ fossero dipendenti, essi, in quanto vettori non nulli, sarebbero proporzionali. Esisterebbe dunque un numero reale $a \neq 0$ tale che $\mathbf{v} = a\,\mathbf{w}$. Il vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ apparterrebbe dunque a $V(h) \cap V(k)$, contro la (iii) della Proposizione 2.4.

La proposizione precedente si estende ad un numero qualunque di autovettori aventi autovalori a due a due distinti. Vale cioè la seguente

Proposizione 2.6. *Se* $v_1, v_2, \ldots, v_t$ *sono autovettori relativi ad autovalori a due a due distinti, allora* $v_1, v_2, \ldots, v_t$ *sono indipendenti.*

Dalla Proposizione 2.6 segue subito il seguente :

Corollario 2.7 . *Se l'equazione caratteristica di f ha n radici reali e distinte, allora f è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Poiché l'equazione caratteristica ha n radici reali e distinte, è possibile determinare n autovettori relativi ad autovalori a due a due distinti. Essi, per la Proposizione 2.6, sono indipendenti e formano quindi una base di V_n. Per la Proposizione 2.2, f è diagonalizzabile.

Osserviamo esplicitamente che la condizione espressa dal Corollario 2.7 è solo sufficiente ma non necessaria per la diagonalizzabilità, cioè f può essere diagonalizzabile anche se i suoi autovalori non sono tutti distinti.

Ricordiamo ora che, data un'equazione algebrica $p(x) = 0$ di grado n a coefficienti reali, essa nel campo complesso $\mathbb{C}$ ha n radici. Se α è una sua radice, $p(\alpha) = 0$ e il polinomio $p(x)$ risulta divisibile per $(x - \alpha)$. Si dice che α ha *molteplicità* m se $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^m$ ma non per $(x - \alpha)^{m+1}$. La somma delle molteplicità delle radici di $p(x) = 0$ è n; ne segue che la somma delle molteplicità delle radici reali di $p(x) = 0$ è al più n ed è esattamente n nel caso in cui le radici di $p(x) = 0$ sono tutte reali.

Dato un autovalore h di f, la sua molteplicità come radice dell'equazione caratteristica è detta *molteplicità algebrica di h* ed è indicata con $m_a(h)$. La dimensione dell'autospazio V(h) è detta *molteplicità geometrica di h* ed è indicata con $m_g(h)$.

Si prova che :

Proposizione 2.8. *Per ogni autovalore h , si ha* $m_g(h) \leq m_a(h)$.

Proposizione 2.9. *Se h è un autovalore di molteplicità algebrica 1, allora anche la sua molteplicità geometrica è 1.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.8, $m_g(h) \leq m_a(h) = 1$. D'altra parte, per la (i) della Proposizione 2.4, si ha $m_g(h) = \dim V(h) \geq 1$. Ne segue che $m_g(h) = 1$.

Teorema 2.10. *L' endomorfismo f è diagonalizzabile se, e solo se, il suo polinomio caratteristico ha tutte le radici nel campo reale e per ciascuna di esse la molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica.*

Proposizione 2.11. *Sia f diagonalizzabile e siano* $V(h_1), V(h_2),\dots, V(h_t)$ *gli autospazi relativi agli autovalori distinti di f. Detta* B_i *una base di* $V(h_i)$, *per i = 1, ..., t, allora una base di* V_n *formata da autovettori è data da* $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_t$.

ESEMPI

2.1. Studiamo la diagonalizzabilità del seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^2$:

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + 2y, -x - 2y) \in \mathbb{R}^2.$$

Scriviamo la matrice A associata ad f nel riferimento naturale di $\mathbb{R}^2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di f (e di A) è allora $\begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ -1 & -2-t \end{vmatrix}$ = $(1 - t)(-2 - t) + 2 = t^2 + t$. Le radici dell'equazione caratteristica sono dunque

-1 e 0. Per il Corollario 2.7, f è diagonalizzabile. L'autospazio $V(-1)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(A + I_2)\, X = 0$, cioè del sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$. Si ha dunque : $V(-1) = \{ (x, -x), x \in \mathbb{R} \} = L((1, -1))$.

L'autospazio $V(0) = \text{Ker } f$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$, cioè del sistema $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$. Si ha dunque : $V(0) = \{ (-2y, y), y \in \mathbb{R}\}$ $= L((-2,1))$.

Una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di f è allora $\{(1, -1), (-2, 1)\}$.

2.2. Studiamo la diagonalizzabilità del seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (-y,\ x, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Scriviamo la matrice A associata ad f nel riferimento naturale di $\mathbb{R}^3$: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di f (e di A) è allora $\begin{vmatrix} -t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} =$ $(1 - t)(t^2 + 1)$. Le radici di tale polinomio non sono tutte reali. Per il Teorema 2.10, f non è diagonalizzabile.

2.3. Studiamo la diagonalizzabilità del seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (3x,\ 3z, 3y) \in \mathbb{R}^3.$$

Scriviamo la matrice A associata ad f nel riferimento naturale di $\mathbb{R}^3$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di f (e di A) è allora $\begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 0 & -t & 3 \\ 0 & 3 & -t \end{vmatrix} =$ $(3 - t)(t^2 - 9)$. Le radici dell'equazione caratteristica sono dunque -3 e 3, con $m_a(-3) = 1$ e $m_a(3) = 2$. Per la Proposizione 2.9, $m_g(-3) = m_a(-3) = 1$. Per determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 3, consideriamo l'autospazio

$V(3)$ che coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(A - 3I_3)\,X = 0$, cioè del sistema $\begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$. Tale sistema è equivalente all'equazione $y - z = 0$. Ne segue che $\dim V(3) = 2$ e dunque $m_g(3) = m_a(3) = 2$. Per il Teorema 2.10, f è diagonalizzabile.

Per determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f, occorre determinare, per la Proposizione 2.11, una base di ciascun autospazio.

Per quanto visto, è $V(3) = \{ (x, y, y) ,\ x, y \in \mathbb{R}\}$. Una base di $V(3)$ è dunque $\{ (1, 0, 0), (0, 1, 1) \}$.

L'autospazio $V(-3)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(A + 3I_3)X = 0$, cioè del sistema $\begin{cases} 6x = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$. Si ha dunque : $V(-3) = \{ (0, -y, y),\ y \in \mathbb{R} \}$. Una base di $V(-3)$ è quindi $\{(0, -1, 1)\}$. Una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f è allora $\{ (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, -1, 1) \}$.

2.4. Studiamo la diagonalizzabilità del seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \to (x + 2y,\ y - t,\ z - 3t,\ t) \in \mathbb{R}^4.$$

Scriviamo la matrice A associata ad f nel riferimento naturale di $\mathbb{R}^4$:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di f (e di A) è allora $(1 - t)^4$.

L'equazione caratteristica di f ha dunque la sola radice 1, con $m_a(1) = 4$. Per determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 1, consideriamo l'autospazio $V(1)$ ~~che~~ coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$(A - I_4)\, X = 0$, cioè del sistema $\begin{cases} 2y = 0 \\ -t = 0 \\ -3t = 0 \end{cases}$. Si ha dunque : $m_g(1) = \dim V(1) = 2 \neq m_a(1) = 4$. Per il Teorema 2.10, f non è diagonalizzabile.

3. DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE

In questo paragrafo A denoterà una matrice quadrata di ordine n sul campo reale. Così come nell'Esempio 1.6 del Capitolo IV, identificheremo il vettore numerico $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ricordiamo che A è detta diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale. Poiché A è la matrice associata nel riferimento naturale all'endomorfismo $F_A : X \in \mathbb{R}^n \rightarrow A\,X \in \mathbb{R}^n$ (cfr. Osservazione 4.1 del Cap. IV), allora dalla Proposizione 1.3 segue che diagonalizzare A equivale a diagonalizzare l'endomorfismo F_A di $\mathbb{R}^n$. Tutte le definizioni e le proposizioni enunciate per gli endomorfismi si trasformano in maniera naturale in analoghe definizioni e proposizioni relative alle matrici quadrate. Si ha in particolare :

Un vettore numerico $Y \in \mathbb{R}^n$ è detto *autovettore di A* di *autovalore* h se $Y \neq \mathbf{0}$ e $A\,Y = h\,Y$.

Sia h un autovalore di A. L'insieme $V(h) = \{ X \in \mathbb{R}^n : A\,X = h\,X \}$, formato dagli autovettori di A di autovalore h e dal vettore nullo, è detto *autospazio* di A relativo all'autovalore h.

La matrice A è diagonalizzabile se, e solo se, il suo polinomio caratteristico ha tutte le radici nel campo reale e per ciascuna di esse la molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica.

Inoltre, da quanto detto nei paragrafi precedenti segue che :

Se A è diagonalizzabile, una matrice invertibile P che realizza la diagonalizzazione di A (cioè tale che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale D) si ottiene scegliendo come colonne n autovettori, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, di A che formano una base di $\mathbb{R}^n$. Gli elementi della diagonale principale della matrice D simile ad A sono, nell'ordine, gli autovalori di $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

ESEMPI

3.1. Studiamo la diagonalizzabilità della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di A è $\begin{vmatrix} 2-t & 3 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 4-t \end{vmatrix} = (4-t)(t^2-3t-4)$. Le radici dell'equazione caratteristica sono dunque -1 e 4, con $m_a(-1) = 1$ e $m_a(4) = 2$. Si ha allora : $m_g(-1) = m_a(-1) = 1$. Per determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 4, consideriamo l'autospazio V(4) che coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(A - 4I_3)X = 0$, cioè del sistema $\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$.

Tale sistema è equivalente all'equazione $2x - 3y = 0$. Ne segue che $\dim V(4) = 2$ e dunque $m_g(4) = m_a(4) = 2$. La matrice A è dunque diagonalizzabile.

Per determinare una matrice invertibile P che realizzi la diagonalizzazione di A, occorre determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A e quindi una base di ciascun autospazio di A.

Per quanto visto, è $V(4) = \{ (3y / 2, y, z) , y, z \in \mathbb{R}\}$. Una base di V(4) è dunque $\{ (3, 2, 0), (0, 0, 1) \}$.

L'autospazio V(-1) è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(A + I_3)X = 0$, cioè del sistema $\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 5z = 0 \end{cases}$. Si ha dunque : $V(-1) = \{ (x, -x, 0), x \in \mathbb{R} \}$ e una sua base è $\{(1, -1, 0)\}$. Una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A è allora $\{ (3, 2, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 0) \}$ e quindi una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = D$, con D matrice diagonale, è : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice D è $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

CAPITOLO VI

GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO E NELLO SPAZIO

Mantenendo le notazioni del Capitolo II, nel corso del presente capitolo indicheremo con $\mathcal{V}$ lo spazio vettoriale dei vettori (geometrici) liberi dello spazio e con $\mathcal{V}_\pi$ lo spazio vettoriale dei vettori (geometrici) liberi di un piano π.

Se A e B sono due punti distinti, la retta passante per A e B sarà detta *retta AB*.

1. DIPENDENZA LINEARE IN $\mathcal{V}$ E $\mathcal{V}_\pi$

Siano $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{CD}$ due vettori liberi non nulli di $\mathcal{V}$ (di $\mathcal{V}_\pi$). Si dice che **a** e **b** sono *paralleli*, e si scrive $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, se i segmenti AB e CD sono paralleli. La definizione è ben posta perché non dipende dai rappresentanti scelti per **a** e **b**.

Considerato un punto O dello spazio (del piano π), diciamo OA ed OB i rappresentanti rispettivamente di **a** e **b** in O. Si ha :

a e **b** sono dipendenti $\Leftrightarrow$ **a** e **b** sono proporzionali $\Leftrightarrow$ OA e OB sono proporzionali $\Leftrightarrow$ OA e OB giacciono su una stessa retta $\Leftrightarrow$ OA e OB sono paralleli $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Poiché si conviene che il vettore libero nullo dello spazio (del piano π) è parallelo ad ogni vettore libero dello spazio (del piano π), allora possiamo affermare che

(1.1) $\forall$ **a**, **b** in $\mathcal{V}$ (in $\mathcal{V}_\pi$), **a** e **b** sono dipendenti $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Siano ora **a**, **b** e **c** tre vettori dipendenti di $\mathcal{V}$, O un punto dello spazio ed OA, OB ed OC i rappresentanti rispettivamente di **a**, **b** e **c** in O. Poiché **a**, **b** e **c** sono dipendenti, uno trà essi, diciamo **a**, dipende dagli altri due. Esistono dunque h e k in $\mathbb{R}$ tali che $\mathbf{a} = h\,\mathbf{b} + k\,\mathbf{c}$. Ciò equivale a dire che OA = h OB + k OC. Se i punti O, B e C non sono allineati (esiste quindi uno ed un sol piano per essi), dall'uguaglianza OA = h OB + k OC segue che A appartiene al piano per O, B e C. Se esiste invece una retta per O, B e C, da OA = h OB + k OC segue che anche A appartiene a tale retta. Poiché per una retta dello spazio passano infiniti piani, possiamo in ogni caso concludere che i segmenti OA, OB ed OC sono contenuti in uno stesso piano. Si ha dunque :

a, **b** e **c** dipendenti $\Longrightarrow$ i rappresentanti di **a**, **b** e **c** in uno stesso punto sono complanari.

Poiché evidentemente vale anche l'implicazione inversa della precedente, possiamo concludere che, per ogni **a**, **b** e **c** in $\mathcal{V}$,

(1.2) **a**, **b** e **c** sono dipendenti $\Longleftrightarrow$ i rappresentanti di **a**, **b** e **c** in uno stesso punto sono complanari.

Si verifica facilmente che due vettori indipendenti di $\mathcal{V}_\pi$ generano $\mathcal{V}_\pi$ e dunque ne costituiscono una base; analogamente, tre vettori indipendenti di $\mathcal{V}$ generano $\mathcal{V}$ e ne costituiscono quindi una base. Gli spazi vettoriali $\mathcal{V}_\pi$ e $\mathcal{V}$ hanno dunque dimensione due e tre, rispettivamente.

2. PRODOTTO SCALARE STANDARD IN $\mathcal{V}$ E $\mathcal{V}_\pi$

D'ora in avanti supporremo fissata un' unità di misura u per i segmenti. Parleremo talvolta semplicemente di lunghezza di un segmento, sottintendendo che tale lunghezza è rispetto all'unità di misura u.

Sia **v** un vettore libero dello spazio (o di un piano). Si dice *modulo* (o *lunghezza*) di **v** rispetto ad u, e lo si indica con $|\mathbf{v}|$, la lunghezza (rispetto ad u) comune ai segmenti che costituiscono **v**.

Siano ora **v** e **w** due vettori liberi non nulli dello spazio (o di un piano). Fissato un punto O dello spazio (del piano), siano OP ed OQ i rappresentanti rispettivamente di **v** e **w** in O. Diciamo *angolo* di **v** e **w**, e lo indichiamo con $\mathbf{v}\hat{}\mathbf{w}$, la misura in radianti dell' angolo convesso formato dalle semirette di origine O contenenti P e Q rispettivamente. Si verifica che la definizione è indipendente dal punto O scelto.

Presi due vettori liberi **v** e **w** , vogliamo associare ad essi un numero reale, che diremo *prodotto scalare standard* di **v** e **w** (associato all'unità u fissata) e indicheremo con $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$ (oppure con $s_u(\mathbf{v}, \mathbf{w})$).

Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, oppure $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, poniamo $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$.

Se **v** e **w** sono entrambi non nulli poniamo :

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos \mathbf{v}\hat{}\mathbf{w}. \tag{2.1}$$

E' facile verificare che il prodotto scalare standard così definito soddisfa le seguenti proprietà : $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}\ (\mathcal{V}_\pi)$ e $\forall\, h, k \in \mathbb{R}$

simmetria : $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$,

bilinearità : $(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = h(\mathbf{u} \bullet \mathbf{w}) + k(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})$,

$\mathbf{u} \bullet (h\mathbf{v} + k\mathbf{w}) = h(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) + k(\mathbf{u} \bullet \mathbf{w})$.

Esso è inoltre *definito positivo*, cioè :

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Osserviamo esplicitamente che, per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ($\mathcal{V}_\pi$), si ha :

$$(2.2) \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\ .$$

Un vettore di lunghezza unitaria è detto *versore*. Chiameremo *versore di una retta orientata* il versore parallelo e concorde alla retta stessa.

Siano $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{CD}$ due vettori liberi non nulli di $\mathcal{V}$ (di $\mathcal{V}_\pi$). Si dice che $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono *ortogonali*, e si scrive $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, se i segmenti AB e CD sono ortogonali. La definizione è ben posta perché non dipende dai rappresentanti scelti per $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Considerato un punto O dello spazio (del piano π), diciamo OA ed OB i rappresentanti rispettivamente di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ in O. Si ha :

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff OA \perp OB \iff \theta = \hat{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \pi / 2 \iff \cos\theta = 0 \iff \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0.$$

Poiché si conviene che il vettore libero nullo dello spazio (del piano π) è ortogonale ad ogni vettore libero dello spazio (del piano π), allora possiamo affermare che

$$(2.3) \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ in } \mathcal{V} \text{ (in } \mathcal{V}_\pi), \qquad \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0.$$

3. RIFERIMENTI ORTONORMALI IN $\mathcal{V}$ E $\mathcal{V}_\pi$

Si dice *riferimento ortonormale* di $\mathcal{V}$ (di $\mathcal{V}_\pi$) ogni riferimento formato da versori a due a due ortogonali.

Proposizione 3.1. *Sia $R = (v, w)$ un riferimento ortonormale di $\mathcal{V}_\pi$. Se $a, b \in \mathcal{V}_\pi$, dette (a_1, a_2) e (b_1, b_2) rispettivamente le componenti di* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *in R, si ha :*

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = (a_1, a_2) \bullet (b_1, b_2).$$

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{a} = a_1\, \mathbf{v} + a_2\, \mathbf{w}$ e $\mathbf{b} = b_1\, \mathbf{v} + b_2\, \mathbf{w}$, dalla bilinearità del prodotto scalare segue che $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = (a_1\, \mathbf{v} + a_2\, \mathbf{w}) \bullet (b_1\, \mathbf{v} + b_2\, \mathbf{w}) = a_1 b_1 (\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}) + a_1 b_2 (\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}) + a_2 b_1 (\mathbf{w} \bullet \mathbf{v}) + a_2 b_2 (\mathbf{w} \bullet \mathbf{w})$ da cui, tenendo conto che $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{w} \bullet \mathbf{w} = 1$ e $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{w} \bullet \mathbf{v} = 0$, si ha l'asserto.

Proposizione 3.2. *Sia $R = (v, w, u)$ un riferimento ortonormale di $\mathcal{V}$. Se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$, dette (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) rispettivamente le componenti di* **a** *e* **b** *in R, si ha :* $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = (a_1, a_2, a_3) \bullet (b_1, b_2, b_3)$.

La dimostrazione della Proposizione 3.2 è analoga a quella della Proposizione 3.1.

Sia $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ ($\mathcal{V}_\pi$). Dette a_1, a_2 e a_3 (a_1 e a_2) le componenti di **a** in un riferimento ortonormale di $\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}_\pi$), dalla (2.2) e dalla Proposizione 3.2 (3.1) segue che :

(3.1) $$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad \left(|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right).$$

4. RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE MONOMETRICO NEL PIANO

Sia π un piano. Si dice *riferimento cartesiano ortogonale monometrico del piano* π una coppia $R = (O, \mathcal{R}_v = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y))$, dove O è un punto di π, detto *origine,* ed $\mathcal{R}_v = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ è un riferimento ortonormale di $\mathcal{V}_\pi$. Siano U ed U' i due punti tali che $\mathbf{OU} = \mathbf{e}_x$ ed $\mathbf{OU'} = \mathbf{e}_y$. I punti U ed U' sono detti *punti unitari* del riferimento. Le rette OU e OU' sono dette *assi coordinati* e, precisamente, *asse x* ed *asse y* ; tali rette si considerano orientate concordemente ai vettori $\mathbf{e}_x$ ed $\mathbf{e}_y$, che sono i versori degli assi.

Preso un punto P del piano, consideriamo il vettore libero **OP**. Dette x ed y le componenti di **OP** in $\mathcal{R}_v$, i numeri reali x ed y sono detti *coordinate cartesiane* di P nel riferimento R; x si dice *ascissa* di P ed y *ordinata* . Scriveremo P(x, y) per intendere che le coordinate di P sono x ed y. Dire quindi che P ha coordinate x ed y significa che $\mathbf{OP} = x\, \mathbf{e}_x + y\, \mathbf{e}_y$. Per determinare x ed y occorre dunque considerare i punti P' e P" ottenuti proiettando ortogonalmente il punto P sulle rette x ed y ; si ha :

$$|x| = |\mathbf{OP'}|\ ,\ \ |y| = |\mathbf{OP''}|\ ,$$

da cui $x = \pm |x|$ e $y = \pm |y|$, a seconda che i vettori **OP'** ed **OP"** siano concordi o discordi con $\mathbf{e}_x$ ed $\mathbf{e}_y$ rispettivamente .

L'applicazione $P \in \pi \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$ è biettiva , per come è stata costruita.

Si vede subito che risulta O(0, 0), U(1,0) e U'(0,1) .

Proposizione 4.1 . *Considerati i punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, le componenti in $\mathcal{R}_v$ del vettore **AB** sono $x_2 - x_1$ ed $y_2 - y_1$.*

Dimostrazione. Per come è stata definita l'addizione in $\mathcal{V}_\pi$, **OA** + **AB** = **OB** , da cui

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}\ . \tag{4.1}$$

Per l'isomorfismo coordinato associato al riferimento $\mathcal{R}_v$, le relazioni che valgono tra i vettori valgono anche tra le loro componenti in $\mathcal{R}_v$. Poiché le componenti di **OA** sono (x_1, y_1) e quelle di **OB** sono (x_2, y_2), allora, dette a_x ed a_y le componenti di **AB** , per la (4.1) si ha : $(a_x , a_y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$, da cui :

$$a_x = x_2 - x_1\ \ ,\ a_y = y_2 - y_1\ .$$

D'ora in avanti scriveremo $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ per intendere che le componenti del vettore $\mathbf{v}$ in $\mathcal{R}_v$ sono v_x e v_y.

Siano $\mathbf{v}(v_x , v_y)$ e $\mathbf{w} (w_x , w_y)$ due vettori non nulli. Dalle (2.1) e (3.1) e dalla Proposizione 3.1 segue che :

$$(4.2) \qquad \cos \mathbf{v}\hat{\ }\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} = (v_x w_x + v_y w_y) / \sqrt{v_x^2 + v_y^2} . \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$$

In particolare , essendo (1, 0) le componenti di $\mathbf{e}_x$ e (0, 1) le componenti di $\mathbf{e}_y$, si ha :

$$(4.3) \qquad \cos \mathbf{v}\hat{\ }\mathbf{e}_x = v_x / \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \qquad \cos \mathbf{v}\hat{\ }\mathbf{e}_y = v_y / \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad .$$

5. CAMBIAMENTI DI RIFERIMENTO

Siano $R = (O , \mathcal{R}_v = (\mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y))$ ed $R' = (O' , \mathcal{R}'_v = (\mathbf{e'}_x , \mathbf{e'}_y))$ due riferimenti cartesiani ortogonali monometrici di un piano. Vogliamo determinare le formule di trasformazione delle coordinate di un punto nel passaggio da R ad R' .

Diciamo $B = (b_{ij})$ la matrice di passaggio da $\mathcal{R}_v$ ad $\mathcal{R}'_v$ (cfr. Capitolo II, Paragrafo 7) .

Sia P un punto del piano. Indichiamo con (x, y) le coordinate di P in R , con (x' , y') le coordinate di P in R' e con (c_1 , c_2) le coordinate di O in R'. Le componenti del vettore **OP** in $\mathcal{R}_v$ sono (x, y); per la Proposizione 4.1, le componenti di **OP** in $\mathcal{R}'_v$ sono $(x' - c_1 , y' - c_2)$. Per le (7.1) del Capitolo II si ha allora :

$$\begin{cases} x' - c_1 = b_{11} x + b_{12} y \\ y' - c_2 = b_{21} x + b_{22} y \end{cases} , \quad \text{da cui}$$

$$(5.1) \qquad \begin{cases} x' = b_{11}\, x + b_{12}\, y + c_1 \\ y' = b_{21}\, x + b_{22}\, y + c_2 \end{cases} .$$

Le (5.1) sono le *formule di passaggio* dal riferimento R al riferimento R'.

6. RAPPRESENTAZIONE DELLA RETTA

D'ora in avanti π indicherà un piano ed $R = (O, \mathscr{R}_v = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y))$ un fissato riferimento cartesiano ortogonale monometrico di π.

Rappresentare in R un insieme X di punti del piano π significa determinare un sistema di equazioni S in due incognite (ed eventuali parametri) tale che :

un punto P appartiene ad X $\Leftrightarrow$ *le coordinate di P in R verificano le equazioni di S .*

Sia r una retta di π.

Proposizione 6.1. *La retta r è rappresentata in R da un sistema parametrico del tipo* $\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \end{cases}$, *con* $x_o, y_o, l, m \in \mathbb{R}$, $(l, m) \neq (0, 0)$ *e t parametro reale.*

Dimostrazione. Sia $A(x_o, y_o)$ un punto della retta r e sia $\mathbf{v}(l, m)$ un vettore libero non nullo parallelo ad r . Detto $P(x, y)$ il generico punto del piano, si ha :

(6.1) $\qquad P \in r \Leftrightarrow \mathbf{AP} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow$ (per la (1.1)) $\mathbf{AP}$ e $\mathbf{v}$ sono dipendenti.

Per la Proposizione 4.1 le componenti di $\mathbf{AP}$ in $\mathscr{R}_v$ sono $(x - x_o, y - y_o)$. Per l'isomorfismo coordinato associato ad $\mathscr{R}_v$, la dipendenza dei vettori $\mathbf{AP}$ e $\mathbf{v}$

equivale alla dipendenza dei vettori numerici $(x - x_o, y - y_o)$ e (l, m). Dalla (6.1) segue allora che

$P \in r \Leftrightarrow (x - x_o, y - y_o)$ e (l, m) sono dipendenti $\Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}:$ $(x - x_o, y - y_o) = t\ (l, m) \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}: \quad x - x_o = l\,t$ e $y - y_o = m\,t \Leftrightarrow$

$$\exists\, t \in \mathbb{R}: \quad \begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \end{cases}.$$

Il sistema parametrico $\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \end{cases}$ (con t parametro reale) rappresenta dunque la retta r nel riferimento R.

E' evidente che ogni sistema parametrico a coefficienti reali del tipo $\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \end{cases}$ con $(l, m) \neq (0, 0)$ rappresenta una retta; precisamente, la retta passante per il punto di coordinate (x_o, y_o) e parallela al vettore di componenti (l, m).

Proposizione 6.2. *La retta r è rappresentata in R da un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ ed $(a, b) \neq (0, 0)$ (rappresentazione ordinaria o cartesiana di r).*

Dimostrazione. Sia $A(x_o, y_o)$ un punto della retta r e sia $\mathbf{v}(l, m)$ un vettore libero non nullo parallelo ad r. Per quanto visto nel corso della dimostrazione della Proposizione 6.1, detto $P(x, y)$ il generico punto del piano, si ha :

$P \in r \Leftrightarrow \mathbf{AP} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{AP}$ e $\mathbf{v}$ sono dipendenti $\Leftrightarrow (x - x_o, y - y_o)$ e (l, m) sono dipendenti $\Leftrightarrow$ (per la Proposizione 3.3 del Capitolo III)

$$\det\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\,(x - x_0) - l\,(y - y_o) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$m\,x - l\,y - m\,x_o + l\,y_o = 0$.

L'equazione $m\,x - l\,y - m\,x_o + l\,y_o = 0$ rappresenta dunque la retta r nel riferimento R. Ponendo $m = a$, $-l = b$, $-m\,x_o + l\,y_o = c$, l'equazione diventa $ax + by + c = 0$ e si ha l'asserto.

Osserviamo che, essendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, si ha che l ed m, e quindi a e b, non sono entrambi nulli.

Si può provare che :

Proposizione 6.3. *Ogni equazione del tipo $ax + by + c = 0$, con a, b e c reali e $(a, b) \neq (0, 0)$ rappresenta una retta del piano parallela al vettore $\mathbf{v}(-b, a)$. Inoltre, due equazioni di primo grado in x e y rappresentano la stessa retta se, e solo se, esse sono proporzionali.*

Un vettore non nullo $\mathbf{v}(l, m)$ parallelo alla retta r è detto *vettore direzione* di r. Le componenti (l, m) di **v** sono dette *numeri (o parametri) direttori* di r. In particolare, essendo $\mathbf{e}_x$ un vettore non nullo parallelo all'asse x, le componenti (1, 0) di $\mathbf{e}_x$ sono una coppia di numeri direttori dell'asse x; analogamente si prova che (0,1) è una coppia di numeri direttori dell'asse y.

Proposizione 6.4. *I numeri direttori di r sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità diverso da zero.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{v}(l, m)$ è un vettore non nullo parallelo ad r, (l, m) è una coppia di numeri direttori di r. Sia $(l', m') \neq (0, 0)$. Si ha:

(l', m') è una coppia di numeri direttori di r $\Leftrightarrow$ v'(l', m') $\|$ r $\Leftrightarrow$ v' $\|$ **v** $\Leftrightarrow$

v' e **v** sono dipendenti $\Leftrightarrow$ per l'isomorfismo coordinato associato ad $\mathcal{R}_v$, (l, m)

ed (l', m') sono dipendenti $\Leftrightarrow$ (l, m) ed (l', m') sono proporzionali.

Per quanto su detto, se $\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \end{cases}$ è una rappresentazione parametrica della retta r, i coefficienti l ed m del parametro t sono numeri direttori di r; se $ax + by + c = 0$ è un'equazione che rappresenta r, allora (-b, a) è una coppia di numeri direttori di r.

Siano $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ due punti distinti di π. Il vettore **AB** è un vettore direzione della retta r passante per A e B. Ne segue che le componenti $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ di **AB** sono numeri direttori di r. Una rappresentazione parametrica di r (cfr. Proposizione 6.1) è allora

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t \end{cases}.$$

Una rappresentazione ordinaria di r (cfr. Proposizione 6.2) si ottiene da $\det\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} = 0$. L'equazione $(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$ rappresenta dunque la retta r.

Osserviamo che , se $y_2 - y_1 \neq 0$ e $x_2 - x_1 \neq 0$, l'equazione precedente si può scrivere nella forma $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (detta dei *rapporti uguali*).

ESEMPI

6.1. Rappresentiamo la retta r passante per il punto A(-2, 1) e parallela al vettore **v** (4, 3).

Una rappresentazione parametrica di r è $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = \ \ 1 + 3t \end{cases}$, con t parametro reale.

Una rappresentazione ordinaria della retta r si ottiene da $\begin{vmatrix} x+2 & y-1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Un'equazione che rappresenta r è quindi $3x - 4y + 10 = 0$.

6.2. Rappresentiamo la retta r per i punti A(1, -2) e B(0, 2).

Una rappresentazione parametrica di r è $\begin{cases} x = \ \ 1 - t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$, con t parametro reale.

Una rappresentazione ordinaria della retta r è fornita dall'equazione $4x + y - 2 = 0$, che si ottiene da $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Poiché appartengono all'asse x tutti e soli i punti che hanno ordinata zero, allora l'asse x è rappresentato dall'equazione $y = 0$; analogamente, ci si rende subito conto che l'equazione $x = 0$ rappresenta l'asse y.

Sia r la retta rappresentata dall' equazione $ax + by + c = 0$. Evidentemente, r passa per l'origine se, e solo se, $c = 0$. Se $b \neq 0$, l'equazione $ax + by + c = 0$ può essere esplicitata rispetto alla y, ottenendo $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Posto $m = -\frac{a}{b}$ e $p = -\frac{c}{b}$, l'equazione diventa $y = mx + p$ (*forma esplicita dell'equazione della retta*). Il coefficiente della x in tale equazione è detto *coefficiente angolare* di r.

7. COSENI DIRETTORI DI UNA RETTA ORIENTATA

Sia r una retta di π e sia $ax + by + c = 0$ un'equazione che rappresenta r nel riferimento R.

Supponiamo ora r orientata. Ricordiamo che $(-b , a)$ sono le componenti di un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ parallelo ad r . La misura $x\hat{}r$ dell'angolo convesso formato dall'asse x e dalla retta r coincide con $\mathbf{e}_x\hat{}\mathbf{v}$ o con $\mathbf{e}_x\hat{}(-\mathbf{v})$ a seconda che $\mathbf{v}$ sia concorde o discorde con r . Utilizzando le (4.3) si ha allora :

$$\cos x\hat{}r = \pm \cos \mathbf{e}_x\hat{}\mathbf{v} = \mp b / \sqrt{a^2 + b^2} ;$$

analogamente,

$$\cos y\hat{}r = \pm \cos \mathbf{e}_y\hat{}\mathbf{v} = \pm a / \sqrt{a^2 + b^2}$$

(nelle formule precedenti è da prendersi il segno superiore o inferiore a seconda che $\mathbf{v}$ sia concorde o discorde con r) .

I coseni su scritti vengono detti *coseni direttori* della retta r.

8. INTERSEZIONE DI DUE RETTE E CONDIZIONI DI PARALLELISMO

Ricordiamo che due rette r ed r' di un piano π sono parallele se coincidono oppure non hanno punti in comune. Se $r = r'$, diremo che esse sono *impropriamente parallele*, se invece $r \cap r' = \emptyset$, diremo che esse sono *propriamente parallele.*

Se (l, m) è una coppia di numeri direttori di r ed (l', m') è una coppia di numeri direttori di r', si ha:

$r \parallel r' \Leftrightarrow \mathbf{v}(l, m) \parallel \mathbf{v}'(l', m') \Leftrightarrow$ (per la (1.1)) $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono dipendenti $\Leftrightarrow$ (per l'isomorfismo coordinato associato ad $\mathcal{R}_v$) (l, m) ed (l', m') sono dipendenti $\Leftrightarrow$ (l, m) ed (l', m') sono proporzionali.

Poiché ogni rappresentazione di una retta fornisce in particolare una coppia di numeri direttori della retta stessa, allora, comunque siano rappresentate le rette r ed r', è possibile ricavare una condizione analitica di parallelismo tra esse. Facciamo qualche esempio:

- se la retta r è rappresentata dall'equazione $ax + by + c = 0$ e la retta r' è rappresentata dall'equazione $a'x + b'y + c' = 0$, allora, ricordando che $(-b, a)$ è una coppia di numeri direttori di r e $(-b', a')$ è una coppia di numeri direttori di r', si ha:

$r \parallel r' \Leftrightarrow (-b, a)$ e $(-b', a')$ sono proporzionali $\Leftrightarrow (a, b)$ e (a', b') sono proporzionali;

in particolare, essendo $(1, 0)$ una coppia di numeri direttori dell'asse x e $(0, 1)$ una coppia di numeri direttori dell'asse y, si ha :

$$r \parallel \text{asse } x \Leftrightarrow (-b, a) \text{ e } (1, 0) \text{ sono proporzionali} \Leftrightarrow a = 0$$

$$r \parallel \text{asse } y \Leftrightarrow (-b, a) \text{ e } (0, 1) \text{ sono proporzionali} \Leftrightarrow b = 0;$$

- se la retta r è rappresentata parametricamente dal sistema $\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \end{cases}$ e la retta r' è rappresentata dall'equazione $a'x + b'y + c' = 0$, allora

$$r \parallel r' \Leftrightarrow (l, m) \text{ e } (-b', a') \text{ sono proporzionali;}$$

- se le rette r ed r' non sono parallele all'asse y e sono rappresentate in forma esplicita da $y = mx + p$ e $y = m'x + p'$, allora

$$r \parallel r' \Leftrightarrow m = m'.$$

Siano r ed r' rappresentate rispettivamente dalle equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$.

Se (a, b) ed (a', b') sono proporzionali, le rette sono parallele. Si possono allora presentare due casi : (a, b, c) ed (a', b', c') sono proporzionali oppure (a, b, c) ed (a', b', c') non sono proporzionali. Dalla Proposizione 6.3 segue che nel primo caso r ed r' coincidono (impropriamente parallele), mentre nel secondo caso r ed r' sono distinte (propriamente parallele).

Supponiamo ora (a, b) ed (a', b') non proporzionali. In tal caso le rette r ed r' non sono parallele; esse hanno dunque un sol punto in comune, le cui coordinate sono ovviamente l'unica soluzione del sistema lineare $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$.

Consideriamo un punto $A(x_1, y_1)$. Una coppia di numeri direttori della retta per A parallela all'asse x è (1, 0); ne segue che tale retta è rappresentata dall'equazione $y - y_1 = 0$, ovvero da $y = y_1$. Analogamente, la retta per A parallela all'asse y è rappresentata dall' equazione $x = x_1$.

9. ORTOGONALITA' TRA RETTE

Considerate due rette r ed r' di π , sia (l, m) una coppia di numeri direttori di r ed (l', m') una coppia di numeri direttori di r'. Si ha:

$r \perp r' \Leftrightarrow \mathbf{v}(l, m) \perp \mathbf{v}'(l', m') \Leftrightarrow$ (per la (2.3)) $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}' = 0 \Leftrightarrow$ (per la Proposizione 3.1) $(l, m) \bullet (l', m') = 0 \Leftrightarrow l\,l' + m\,m' = 0$.

Ne segue che, comunque siano rappresentate le rette r ed r', è possibile ricavare una condizione analitica di ortogonalità tra esse. Facciamo qualche esempio:

- se la retta r è rappresentata dall'equazione $ax + by + c = 0$ e la retta r' è rappresentata dall'equazione $a'x + b'y + c' = 0$, allora, ricordando che $(-b, a)$ è una coppia di numeri direttori di r e $(-b', a')$ è una coppia di numeri direttori di r', si ha:

$$r \perp r' \iff (-b)(-b') + a a' = 0 \iff a a' + b b' = 0;$$

- se la retta r è rappresentata parametricamente dal sistema $\begin{cases} x = x_0 + l t \\ y = y_0 + m t \end{cases}$ e la retta r' è rappresentata dal sistema $\begin{cases} x = x_0' + l' t' \\ y = y_0' + m' t' \end{cases}$, allora

$$r \perp r' \iff l l' + m m' = 0;$$

- se le rette r ed r' non sono parallele né all'asse x né all'asse y e sono rappresentate in forma esplicita da $y = mx + p$ e $y = m'x + p'$, allora m ed m' sono entrambi non nulli e si ha :

$$r \perp r' \iff m' = -1/m.$$

Sia r la retta rappresentata dall'equazione $ax + by + c = 0$. Il vettore **v**(-b, a) è parallelo ad r. Poiché il vettore **v'**(a, b) è ortogonale a **v**, si ha che tale vettore è anche ortogonale ad r. La coppia (a, b) è dunque una coppia di numeri direttori di ogni retta ortogonale ad r.

10. DISTANZA TRA INSIEMI NEL PIANO

Siano $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ due punti di π. Diciamo *distanza* tra A e B, e la indichiamo con d(A,B), il modulo del vettore **AB** . Per la (3.1) e per la Proposizione 4.1 si ha allora :

$$d(A,B) = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \, .$$

Dati due insiemi S e T di punti del piano, diciamo *distanza* tra S e T e la indichiamo con d(S, T), l'estremo inferiore dell'insieme numerico $\{ d(P, Q) : P \in S, Q \in T \}$; poniamo cioè

$$d(S, T) = \inf \{ d(P, Q) : P \in S, Q \in T \}.$$

Se r è una retta ed A un punto del piano, si ha :

$d(A, r) = d(A, H)$, dove H è l'intersezione con r della retta per A ortogonale ad r.

Se (x_1, y_1) sono le coordinate di A ed r è rappresentata dall'equazione $ax + by + c = 0$, si prova che :

$$d(A, r) = | ax_1 + by_1 + c | \, / \, \sqrt{a^2+b^2} \, .$$

Se r ed s sono due rette, si ha :

$d(r, s) = 0 \iff r \cap s \neq \emptyset$, (in particolare, se r = s) ;

$d(r, s) = d(P, s)$, essendo P un qualunque punto di r, se r ed s sono propriamente parallele.

11. PUNTO MEDIO E ASSE DI UN SEGMENTO

Siano $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ due punti distinti di π. Detto $M(x_M, y_M)$ il *punto medio* del segmento di estremi A e B, risulta **AM** = **MB**. Per l'isomorfismo coordinato associato ad $\mathcal{R}_v$ si ha che $(x_M - x_1 , y_M - y_1) = (x_2 - x_M , y_2 - y_M)$, da cui si ricava :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}.$$

L'*asse* del segmento AB è l'insieme dei punti P del piano tali che d(A, P) = d(B, P). Ne segue che

$P(x, y) \in$ asse di AB $\Leftrightarrow$ $d^2(A,P) = d^2(B,P) \Leftrightarrow$ $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 =$

$(x - x_2)^2 + (y - y_1)^2 \Leftrightarrow 2x\,(x_2 - x_1) + 2y\,(y_2 - y_1) + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$.

E' facile verificare che l'asse del segmento AB coincide con la retta perpendicolare alla retta AB e passante per il punto medio del segmento AB .

12. CIRCONFERENZA

Fissato un punto $C \in \pi$ e un numero reale $r > 0$, la *circonferenza* di centro C e raggio r è l'insieme $\mathscr{C}$ dei punti del piano π aventi distanza r da C. Dette (x_o, y_o) le coordinate di C, si ha :

$P(x, y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow d(C,P) = r \Leftrightarrow d^2(C,P) = r^2 \Leftrightarrow (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$.

L'equazione

(12.1) $$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$

rappresenta dunque la circonferenza $\mathscr{C}$.

Sviluppando la (12.1) e ponendo $a = -2x_o$, $b = -2y_o$ e $c = x_o^2 + y_o^2 - r^2$, la (12.1) diventa

(12.2) $$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Osserviamo che i numeri reali a, b e c che compaiono nella (12.2) sono legati dalla relazione $a^2 + b^2 - 4c > 0$; inoltre ogni equazione che si ottiene dalla

(12.2) moltiplicandola per un numero reale non nullo rappresenta ancora la circonferenza $\mathscr{C}$.

Viceversa, data un'equazione del tipo $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$, con A, B, C, D numeri reali e $A \neq 0$, questa si può scrivere, dividendo per A, nella forma (12.2). Sommando a entrambi i membri $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$, la (12.2) diventa

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

e dunque rappresenta una circonferenza $\mathscr{C}$ se, e solo se, $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$ o, equivalentemente, $a^2 + b^2 - 4c > 0$. In tal caso il centro di $\mathscr{C}$ è il punto $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e il raggio di $\mathscr{C}$ è $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

ESEMPI

12.1. Rappresentiamo la circonferenza $\mathscr{C}$ di centro $C(2, -1)$ e raggio $r = 3$.
Per la (12.1) un'equazione che rappresenta la circonferenza $\mathscr{C}$ è $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$, cioè $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

12.2. L'equazione $x^2 + y^2 - 6x - 5y = 0$ può essere scritta nella forma $(x - 3)^2 + (y - 5/2)^2 = 9 + \frac{25}{4}$ e dunque rappresenta la circonferenza di centro $C(3, 5/2)$ e raggio $r = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$.

12.3. L'equazione $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 7 = 0$ non rappresenta una circonferenza in quanto $4 + 1 - 7 = -2 < 0$.

Ricordiamo che esiste una ed una sola circonferenza passante per tre punti non allineati. Ricordiamo inoltre che il numero di punti che una retta r ha in comune con una circonferenza $\mathscr{C}$ è 0, 1 oppure 2 (ed r è detta, rispettivamente, *esterna*, *tangente* o *secante* la circonferenza) a seconda che la sua distanza dal centro di $\mathscr{C}$ è maggiore, uguale o minore del raggio; l'unica retta tangente a $\mathscr{C}$ in un suo punto P è la retta ortogonale alla congiungente P con il centro di $\mathscr{C}$.

ESEMPI

12.4. Assegnati i punti A(1 ,1) , B(2 , 1) e C(1 , –1), che non sono allineati in quanto **AB**(1,0) non è proporzionale ad **AC**(0,–2), rappresentiamo la circonferenza passante essi.

La circonferenza richiesta ha equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, con a, b e c opportuni. Per determinare a, b e c, imponiamo che le coordinate dei punti assegnati soddisfino tale equazione. Si ottiene il seguente sistema lineare nelle incognite a, b e c : $\begin{cases} a + b + c = -2 \\ 2a + b + c = -5 \\ a - b + c = -2 \end{cases}$; esso è equivalente al sistema a gradini

$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ \quad b + c = 1 \\ \quad\quad 2c = 2 \end{cases}$ che ha come unica soluzione la terna (–3, 0, 1). Un'equazione della circonferenza richiesta è quindi $x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0$.

12.5. Rappresentiamo la retta r tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ nel suo punto $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

La circonferenza assegnata ha centro nell' origine e raggio 1 , per cui la retta r è la retta per P ortogonale al vettore **OP** $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Si ha quindi che r è rappresentata dal sistema parametrico $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - t \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + t \end{cases}$ o, equivalentemente,

dall'equazione $x + y - \sqrt{2} = 0$.

13. RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE MONOMETRICO NELLO SPAZIO

Si dice *riferimento cartesiano ortogonale monometrico* dello spazio una coppia $R = (O, \mathcal{R}_v = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z))$, dove O è un punto, detto *origine*, e $\mathcal{R}_v = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ è un riferimento ortonormale dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ dei vettori liberi dello spazio. Siano U, U' ed U" i tre punti tali che $\mathbf{OU} = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{OU'} = \mathbf{e}_y$, $\mathbf{OU''} = \mathbf{e}_z$. I punti U, U' ed U" sono detti *punti unitari* del riferimento. Le rette OU, OU' ed OU" sono dette *assi coordinati* e, precisamente, *asse x*, *asse y* ed *asse z*. Tali rette si considerano orientate concordemente ai vettori $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, che sono i versori degli assi. I tre piani che contengono a due a due gli assi coordinati sono detti *piani coordinati*.

Preso un punto P dello spazio, consideriamo il vettore libero **OP**. Dette x, y e z le componenti di **OP** in $\mathcal{R}_v$, i numeri reali x, y e z sono detti *coordinate cartesiane* di P nel riferimento R; x si dice *ascissa* di P, y *ordinata* e z *quota*. Analogamente a quanto fatto nel piano, scriveremo P(x, y, z) per intendere che le coordinate di P sono x, y e z. Dire che P ha coordinate x, y e z significa quindi che $\mathbf{OP} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$. Per determinare x, y e z occorre dunque considerare il punto P' ottenuto proiettando ortogonalmente il punto P sull'asse x (cioè il punto comune all'asse x e al piano per P ortogonale all'asse x), il punto P" proiezione ortogonale di P sull'asse y e il punto P"' proiezione ortogonale di P sull'asse z; si ha :

$$|x| = |\mathbf{OP'}|, \quad |y| = |\mathbf{OP''}|, \quad |z| = |\mathbf{OP'''}|,$$

da cui $x = \pm|x|$, $y = \pm|y|$ e $z = \pm|z|$, a seconda che i vettori **OP'**, **OP"** e **OP"'** siano concordi o discordi con $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ ed $\mathbf{e}_z$, rispettivamente.

L'applicazione che ad ogni punto dello spazio associa la terna ordinata delle sue coordinate in R è biettiva, per come è stata costruita.

Si vede subito che risulta O(0, 0, 0), U(1,0, 0) U'(0,1, 0) e U"(0, 0, 1).

Proviamo che :

Proposizione 13.1 . *Considerati i punti* $A(x_1, y_1, z_1)$ *e* $B(x_2\, y_2, z_2)$, *le componenti in* $\mathcal{R}_v$ *del vettore* **AB** *sono* $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ *e* $z_2 - z_1$.

Dimostrazione . Per come è stata definita l'addizione in $\mathcal{V}$, **OA** + **AB** = **OB** , da cui

(13.1) $$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} .$$

Per l'isomorfismo coordinato associato al riferimento $\mathcal{R}_v$, le relazioni che valgono tra i vettori valgono anche tra le loro componenti in $\mathcal{R}_v$. Poiché le componenti di **OA** sono (x_1 , y_1 , z_1) e quelle di **OB** sono (x_2, y_2, z_2) , dette a_x , a_y ed a_z le componenti di **AB** , per la (13.1) si ha :

$$a_x = x_2 - x_1 \;\; ; \; a_y = y_2 - y_1 \, ; \, a_z = z_2 - z_1 .$$

D'ora in avanti parleremo semplicemente di riferimento cartesiano dello spazio sottintendendo che esso è ortogonale monometrico. Scriveremo $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ per intendere che le componenti del vettore **v** in $\mathcal{R}_v$ sono v_x , v_y e v_z.

Siano $\mathbf{v}\,(v_x, v_y, v_z)$ e $\mathbf{w}\,(w_x, w_y, w_z)$ due vettori non nulli. Dalle (2.1) e (3.1) e dalla Proposizione 3.2 segue che :

(13.2) $$\cos \hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} =$$

$$(v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z) / \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \,.\, \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} \,.$$

In particolare, essendo (1, 0, 0) le componenti di $\mathbf{e}_x$, (0, 1, 0) le componenti di $\mathbf{e}_y$ e (0, 0, 1) le componenti di $\mathbf{e}_z$, si ha :

(13.3) $$\cos \hat{\mathbf{v}\mathbf{e}_x} = v_x / \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad , \quad \cos \hat{\mathbf{v}\mathbf{e}_y} = v_y / \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \;,$$

$$\cos \hat{\mathbf{v}\mathbf{e}_z} = v_z / \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \,.$$

14. CAMBIAMENTI DI RIFERIMENTO

Siano $R = (O , \mathcal{R}_v = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z))$ ed $R' = (O', \mathcal{R}'_v = (\mathbf{e'}_x, \mathbf{e'}_y, \mathbf{e'}_z))$ due riferimenti cartesiani dello spazio. Analogamente al caso del piano, si prova che, dette (x, y, z) e (x', y', z') le coordinate di un punto P rispettivamente in R ed R', si ha :

(14.1)
$$\begin{cases} x' = b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z + c_1 \\ y' = b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z + c_2 \, , \\ z' = b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z + c_3 \end{cases}$$

dove $B = (b_{ij})$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{R}_v$ ad $\mathcal{R}'_v$ e (c_1, c_2, c_3) sono le coordinate di O in R'.

Le (14.1) sono le *formule di passaggio* dal riferimento R al riferimento R'.

15. PRODOTTO VETTORIALE IN $\mathcal{V}$

Sia $R = (O , \mathcal{R}_v = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z))$ un riferimento cartesiano dello spazio. Dati due vettori $\mathbf{v} = v_x\, \mathbf{e}_x + v_y\, \mathbf{e}_y + v_z\, \mathbf{e}_z$ e $\mathbf{w} = w_x\, \mathbf{e}_x + w_y\, \mathbf{e}_y + w_z\, \mathbf{e}_z$, diremo *prodotto vettoriale* di $\mathbf{v}$ per $\mathbf{w}$, e lo indicheremo con $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, il vettore

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_y\, w_z - v_z\, w_y)\, \mathbf{e}_x - (v_x\, w_z - v_z\, w_x)\, \mathbf{e}_y + (v_x w_y - v_y\, w_x)\, \mathbf{e}_z.$$

Le componenti in $\mathcal{R}_v$ di $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ sono quindi i determinanti :

$$\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} , \; - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} , \; \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} .$$

Si prova facilmente, tenendo conto delle proprietà del prodotto scalare standard tra vettori liberi, che :

(15.1) $$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{v} = 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{w} = 0 \, ,$$

per cui il vettore $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ è ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$.

Si ha inoltre:

(15.2) $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono dipendenti ,

(15.3) $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = - \mathbf{w} \times \mathbf{v}$,

(15.4) $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z , \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x , \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y .$

16. RAPPRESENTAZIONE DEL PIANO

D'ora in avanti $R = (O , \mathcal{R}_v = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z))$ indicherà un fissato riferimento cartesiano dello spazio.

Rappresentare in R un insieme X di punti dello spazio significa determinare un sistema di equazioni S in tre incognite (ed eventuali parametri) tale che :

un punto P appartiene ad X $\Leftrightarrow$ le coordinate di P in R verificano le equazioni di S .

Sia π un piano.

Proposizione 16.1 . *Il piano π è rappresentato nel riferimento R da un sistema parametrico a coefficienti reali del tipo* $\begin{cases} x = x_0 + l s + l' t \\ y = y_0 + m s + m' t \\ z = z_0 + n s + n' t \end{cases}$, *con (l, m, n) ed (l', m', n') indipendenti ed s e t parametri reali.*

Dimostrazione. Sia $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto di π e siano $\mathbf{v}(l, m, n)$ e $\mathbf{v}'(l', m', n')$, due vettori liberi indipendenti paralleli al piano π. Detto $P(x, y, z)$ il generico punto dello spazio, si ha :

$P \in \pi \iff$ i vettori **AP**, **v** e **v'** applicati in A sono complanari $\iff$ (per la (1.2)) **AP**, **v** e **v'** sono dipendenti $\iff$ **AP** dipende linearmente da **v** e **v'** $\iff$ (per l'isomorfismo coordinato associato ad $\mathcal{R}_v$) $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ dipende linearmente da (l, m, n) ed (l', m', n') $\iff$ $\exists\ s,t \in \mathbb{R} : (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = s\,(l, m, n) + t\,(l', m', n')$ $\iff$

$$\exists\, s,t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + l\,s + l'\,t \\ y = y_0 + m\,s + m'\,t\ . \\ z = z_0 + n\,s + n'\,t \end{cases}$$

Il sistema parametrico $\begin{cases} x = x_0 + l\,s + l'\,t \\ y = y_0 + m\,s + m'\,t \\ z = z_0 + n\,s + n'\,t \end{cases}$ (con s e t parametri reali) rappresenta dunque il piano π nel riferimento R.

E' evidente che ogni sistema parametrico a coefficienti reali del tipo $\begin{cases} x = x_0 + l\,s + l'\,t \\ y = y_0 + m\,s + m'\,t \\ z = z_0 + n\,s + n'\,t \end{cases}$ con (l, m, n) ed (l', m', n') indipendenti ed s e t parametri reali, rappresenta un piano; precisamente, il piano passante per il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) e parallelo ai vettori di componenti (l, m, n) ed (l', m', n') rispettivamente.

Proposizione 16.2. *Il piano π è rappresentato nel riferimento R da un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$, con a, b, c, d numeri reali e $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (rappresentazione ordinaria o cartesiana di π). Inoltre il vettore $w(a, b, c)$ è ortogonale a π.*

Dimostrazione. Sia $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto di π e siano $\mathbf{v}(l, m, n)$ e $\mathbf{v}'(l', m', n')$ due vettori liberi indipendenti paralleli al piano π. Detto $P(x, y, z)$ il generico punto dello spazio, si ha :

$P \in \pi \iff$ i vettori **AP**, **v** e **v'** applicati in A sono complanari $\iff$ **AP**, **v** e **v'** sono dipendenti $\iff$ $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, (l, m, n) e (l', m', n') sono dipendenti $\iff$ (per la Proposizione 3.3 del Capitolo III) $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$. Sviluppando tale determinante secondo la prima riga si ottiene :

$$(m\,n' - m'\,n)\,(x - x_0) + (l'\,n - l\,n')\,(y - y_0) + (l\,m' - l'\,m)\,(z - z_0) = 0.$$

Per quanto visto, l'equazione $(m\,n' - m'\,n)\,(x - x_0) + (l'\,n - l\,n')\,(y - y_0) + (l\,m' - l'\,m)\,(z - z_0) = 0$ rappresenta il piano π nel riferimento R. Ponendo $a = m\,n' - m'\,n$, $b = l'\,n - l\,n'$, $c = l\,m' - l'm$ e il termine noto uguale a d, l'equazione diventa $ax + by + cz + d = 0$. Osserviamo infine che, detto **w** il vettore di componenti (a, b, c), dalla definizione di prodotto vettoriale segue $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{v}'$. Essendo **v** e **v'** linearmente indipendenti, dalla (15.2) segue che **w** è non nullo; inoltre, per la (15.1), **w** è ortogonale sia a **v** che a **v'**, e dunque è ortogonale al piano π. Si ha così l'asserto.

Si può provare che :

Proposizione 16.3. *Ogni equazione a coefficienti reali del tipo $ax + by + cz + d = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ rappresenta un piano ortogonale al vettore di componenti (a, b, c). Inoltre due equazioni di primo grado in x, y, z rappresentano lo stesso piano se , e solo se, esse sono proporzionali.*

ESEMPI

16.1. Rappresentiamo il piano π passante per A(4, 3, -2) e parallelo ai vettori **v**(1, -1, 0) e **v**'(2, 1, 3).

Una rappresentazione parametrica di π è $\begin{cases} x = 4+s+2t \\ y = 3-s+t \\ z = -2+3t \end{cases}$, con s e t parametri reali.

Una rappresentazione ordinaria di π è fornita dall'equazione x + y - z - 9 = 0, che si ottiene da $\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

16.2. Rappresentiamo il piano π passante per i punti A(1, 0, 1), B(2, 0, 0) e C(2, 1, 3). I vettori **AB** (1, 0, -1) e **AC** (1, 1, 2) sono indipendenti ed entrambi paralleli al piano π. Una rappresentazione parametrica di π è allora $\begin{cases} x = 1+s+t \\ y = t \\ z = 1-s+2t \end{cases}$, con s e t parametri reali.

Una rappresentazione ordinaria di π è data dall'equazione x – 3y + z – 2 = 0 , ottenuta da $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Si verifica facilmente che :

x = 0 è un'equazione del piano yz (piano per gli assi y e z);

y = 0 è un'equazione del piano xz (piano per gli assi x e z);

z = 0 è un'equazione del piano xy (piano per gli assi x e y).

17. PARALLELISMO E ORTOGONALITA' TRA PIANI

Siano π e π' due piani. Ricordiamo che π e π' si dicono *paralleli* ($\pi \parallel \pi'$) se non hanno punti in comune (*propriamente* paralleli) oppure coincidono (*impropriamente* paralleli). Evidentemente, detto $\mathbf{w}$ un vettore non nullo ortogonale a π e $\mathbf{w'}$ un vettore non nullo ortogonale a π', si ha :

(17.1) $$\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \mathbf{w} \parallel \mathbf{w'}.$$

I piani π e π' si dicono *ortogonali* se, detto $\mathbf{w}$ un vettore non nullo ortogonale a π e $\mathbf{w'}$ un vettore non nullo ortogonale a π', tali vettori risultano ortogonali. E' dunque :

(17.2) $$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \mathbf{w} \perp \mathbf{w'}.$$

Supponiamo che π e π' siano rappresentati in R rispettivamente dalle equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Per la Proposizione 16.3, $\mathbf{w}(a, b, c)$ è un vettore non nullo ortogonale a π e $\mathbf{w}'(a', b', c')$ è un vettore non nullo ortogonale a π'.

Dalla (17.1) segue allora che :

(17.3) $\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \mathbf{w} \parallel \mathbf{w'} \Leftrightarrow$ $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}'$ sono dipendenti $\Leftrightarrow$ (a, b, c) e (a', b', c') sono dipendenti $\Leftrightarrow$ (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali.

Se $\pi \parallel \pi'$, ovvero (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali, si possono presentare due casi: (a, b, c, d) e (a', b', c', d') sono proporzionali oppure non lo sono. Dalla Proposizione 16.3 segue che nel primo caso $\pi = \pi'$ (π e π' impropriamente paralleli), mentre nel secondo caso $\pi \neq \pi'$ (π e π' propriamente paralleli).

Sia π' un piano parallelo a π . Un'equazione che rappresenta π' è del tipo $hax + hby + hcz + d' = 0$, con $h \neq 0$. Dividendo per h, si ottiene

$ax + by + cz + d'/h = 0$. Ne segue che ogni piano parallelo a π può essere rappresentato da un'equazione del tipo $ax + by + cz + k = 0$.

Per quanto riguarda l'ortogonalità tra piani, dalla (17.2) segue che:

$\pi \perp \pi'$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{w} \perp \mathbf{w}'$ $\Leftrightarrow$ (per la (2.3)) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}' = 0$ $\Leftrightarrow$ (per la Proposizione 3.2) $a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0$.

Ricordiamo che, assegnato un punto A ed un piano π, i piani per A ortogonali a π sono tutti e soli i piani che contengono la retta per A ortogonale a π.

ESEMPI

17.1. I piani π e π' rappresentati rispettivamente dalle equazioni $x - 4y + 3z + 6 = 0$ e $2x - 8y + 6z + 1 = 0$ sono propriamente paralleli in quanto $(1, -4, 3)$ e $(2, -8, 6)$ sono proporzionali, mentre $(1, -4, 3, 6)$ e $(2, -8, 6, 1)$ non lo sono.

17.2. Consideriamo i piani π, π' e π'' rappresentati rispettivamente dalle equazioni $x - 4y + 3z + 6 = 0$, $x + y + z - 2 = 0$ e $2x + y - 4z = 0$.
I piani π e π' sono ortogonali in quanto $(1, -4, 3) \cdot (1, 1, 1) = 1 - 4 + 3 = 0$. I piani π e π'' non sono ortogonali in quanto $(1, -4, 3) \cdot (2, 1, -4) \neq 0$.

17.3. Sia π il piano rappresentato dall'equazione $2x + 3y - 5z + 1 = 0$. Rappresentiamo
(i) il piano per $A(4, 2, 3)$ parallelo a π;
(ii) due piani per l'origine ortogonali a π;
(i) Ogni piano parallelo a π può essere rappresentato da un'equazione del tipo $2x + 3y - 5z + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Se vogliamo che un tale piano passi per A, dobbiamo imporre che le coordinate di A siano una soluzione di tale equazione;

deve essere cioè $2(4) + 3(2) - 5(3) + k = 0$, da cui $k = 1$. Un'equazione del piano richiesto è allora $2x + 3y - 5z + 1 = 0$.

(ii) Un piano per l'origine ha equazione del tipo $ax + by + cz = 0$. Un tale piano è ortogonale a π se, e solo se, $2a + 3b - 5c = 0$. Due soluzioni (non nulle) dell'equazione $2a + 3b - 5c = 0$ sono, ad esempio, $(5, 0, 2)$ e $(1, 1, 1)$. Ne segue che le equazioni $5x + 2z = 0$ e $x + y + z = 0$ rappresentano due piani per l'origine ortogonali a π.

18. RAPPRESENTAZIONE DELLA RETTA

Sia r una retta.

Proposizione 18.1. *La retta r è rappresentata in R da un sistema del tipo*

$$(18.1)\quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases},$$ *con* $(a, b, c), (a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ *e non proporzionali. Viceversa, ogni sistema del tipo (18.1) rappresenta una retta.*

Dimostrazione. Siano π e π' due piani distinti contenenti r. Poiché $r = \pi \cap \pi'$, allora, se π e π' sono rappresentati in R rispettivamente dalle equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, il sistema $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ rappresenta la retta r. Osserviamo esplicitamente che $(a, b, c), (a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ in quanto le equazioni del sistema rappresentano due piani; inoltre, essendo tali piani non paralleli, per la (17.3) le terne (a, b, c) e (a', b', c') non sono proporzionali.

Viceversa, ogni sistema del tipo (18.1) rappresenta una retta in quanto le equazioni del sistema rappresentano ciascuna un piano e tali piani non sono paralleli, essendo (a, b, c) e (a', b', c') non proporzionali.

Se una retta è rappresentata mediante un sistema del tipo (18.1) (*rappresentazione ordinaria o cartesiana* della retta), essa può essere ovviamente rappresentata con un qualunque altro sistema equivalente al precedente. Ad esempio i sistemi $\begin{cases} x - y + z + 11 = 0 \\ x - 2y + 19 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - y + z + 11 = 0 \\ y + z - 8 = 0 \end{cases}$ rappresentano la stessa retta in quanto equivalenti.

Gli assi coordinati si possono ovviamente rappresentare così :

asse x : $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

asse y : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

asse z : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Per individuare una retta r occorre conoscere due piani distinti che la contengono oppure un suo punto e un vettore non nullo ad essa parallelo. Se conosciamo due piani distinti per r, abbiamo già osservato che r si può rappresentare in forma ordinaria con un sistema del tipo (18.1). Proviamo ora che :

Proposizione 18.2. *La retta r è rappresentata in R da un sistema parametrico a coefficienti reali del tipo*

$$(18.2) \qquad \begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases}, \quad \textit{con } t \textit{ parametro reale e } (l, m, n) \neq (0, 0, 0).$$

Dimostrazione. Sia $A(x_1, y_1, z_1)$ un punto di r e $\mathbf{v}(l, m, n)$ un vettore non nullo parallelo ad r. Si ha :

$P(x, y, z) \in r \iff \mathbf{AP} \parallel \mathbf{v} \iff \mathbf{AP}$ e $\mathbf{v}$ sono dipendenti $\iff$

$(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ e (l, m, n) sono dipendenti $\iff$

$\exists\, t \in \mathbb{R} : (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = t(l, m, n) \iff$

$$\exists\, t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases}.$$

Il sistema parametrico $\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases}$ (con t parametro reale) rappresenta dunque la retta r nel riferimento R.

E' evidente che, viceversa, ogni sistema parametrico del tipo (18.2) rappresenta una retta : la retta passante per il punto $A(x_1, y_1, z_1)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(l, m, n)$.

Come nel caso del piano, si definiscono *numeri (o parametri) direttori* di una retta r le componenti di un vettore non nullo parallelo ad r (detto *vettore direzione* di r). Ovviamente, come nel caso del piano, i numeri direttori di r sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Se la retta r è rappresentata in forma parametrica, una terna di numeri direttori di r è data dai coefficienti del parametro.

Sia ora r rappresentata in forma ordinaria da un sistema del tipo (18.1). Considerati i vettori $\mathbf{v}(a, b, c)$ e $\mathbf{v}'(a', b', c')$, si può provare che una terna di numeri direttori di r è data dalle componenti del vettore $\mathbf{v} \times \mathbf{v}'$, prodotto vettoriale di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$. Si ha quindi che una terna di numeri direttori di r è (l, m, n), con

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad m = - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Se A e B sono punti distinti di r , il vettore **AB** è un vettore non nullo parallelo ad r e quindi una terna di numeri direttori di r è data dalle componenti del vettore **AB**.

ESEMPI

18.1. Determiniamo una rappresentazione parametrica della retta r rappresentata dal sistema :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}.$$

Il punto A(2, 0, 0) appartiene ad r (in quanto (2, 0, 0) è una soluzione del sistema che rappresenta r). Poiché $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$, $-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5$ e $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$, (-5, 5, 5) , e dunque (-1, 1, 1) , è una terna di numeri direttori di r. Ne segue che una rappresentazione parametrica di r è fornita dal seguente sistema : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

Una rappresentazione parametrica di r si può anche ottenere direttamente considerando l'insieme $\{ (2 - t, t, t), t \in \mathbb{R} \}$ delle soluzioni del sistema che rappresenta r .

18.2. Rappresentiamo la retta r passante per i punti A(3, 5, -1) e B(2, 1, 0). Una terna di numeri direttori di r è fornita dalle componenti (1, 4, -1) del vettore **BA**, per cui una rappresentazione parametrica di r è $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 4t \\ z = -1 - t \end{cases}$. Una rappresentazione ordinaria di r si può ottenere eliminando il parametro t dalle equazioni precedenti : si ricava t da una delle equazioni e si sostituisce nelle altre due, ottenendo in tal modo due equazioni che rappresentano due piani distinti passanti per r. Ricavando ad esempio t dalla prima equazione, si ha : $t = x - 3$; sostituendo nelle altre due equazioni si ottiene il sistema $\begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$ che rappresenta r in forma ordinaria.

19. COSENI DIRETTORI DI UNA RETTA ORIENTATA

Sia r una retta orientata e **v** un vettore non nullo parallelo ad r. La misura $x\hat{}r$ dell'angolo convesso formato dall'asse x e dalla retta r coincide con $\mathbf{e}_x\hat{}\mathbf{v}$ o con $\mathbf{e}_x\hat{}(-\mathbf{v})$ a seconda che **v** sia concorde o discorde con r. Dette (l , m , n) le componenti di **v**, si ha, utilizzando le (13.3) :

$$\cos x\hat{}r = \pm\, l / \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\ .$$

Analogamente, $\cos y\hat{}r = \pm\, m / \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$ e $\cos z\hat{}r = \pm\, n / \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$.

I coseni su scritti sono detti *coseni direttori* di r.

20. FASCI DI PIANI

Sia r una retta. Diremo *fascio proprio di piani* di asse r l'insieme dei piani passanti per r . Se r è rappresentata da un sistema del tipo (18.1), si prova che un piano appartiene al fascio di asse r se, e solo se, è rappresentato da una equazione del tipo :

(20.1) $h\,(ax + by + cz + d\,) + k\,(a'x + b'y + c'z + d') = 0$, con $h, k \in \mathbb{R}$ e $(h, k) \neq (0, 0)$.

Se risulta $h \neq 0$, la (20.1) si può scrivere, dividendo per h e ponendo $k / h = t$, nella forma :

(20.2) $$ax + by + cz + d + t\,(a'x + b'y + c'z + d') = 0\ .$$

La (20.2) rappresenta tutti i piani del fascio di asse r tranne , ovviamente, quello che si ottiene relativamente alle coppie (0, k) , cioè il piano di equazione $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

ESEMPI

20.1. Rappresentiamo il piano π passante per la retta r rappresentata da $\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ e per il punto A(1, -2, -2).

Il piano π appartiene al fascio di piani di asse r e non coincide con il piano di equazione $2x + y - z - 3 = 0$, in quanto (1, -2, -2) non è soluzione di tale equazione. Ne segue che π può essere rappresentato da un'equazione del tipo $x - 2y + z + 1 + t\,(2x + y - z - 3) = 0$, con $t \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per il punto A si ottiene $4 + t(-1) = 0$, da cui $t = 4$. Un'equazione che rappresenta π è dunque $9x + 2y - 3z - 11 = 0$.

21. PARALLELISMO E ORTOGONALITA' TRA RETTE

Siano r ed r' due rette. Ricordiamo che r ed r' sono *parallele* se, e solo se, esse coincidono (*impropriamente* parallele) oppure sono complanari (cioè esiste un piano che le contiene) e non hanno punti in comune (*propriamente* parallele). Detti **v**(l, m, n) e **v'**(l', m', n') due vettori non nulli paralleli rispettivamente ad r e ad r', si ha :

$r \parallel r' \iff \mathbf{v} \parallel \mathbf{v}' \iff$ **v** e **v'** sono dipendenti $\iff$ (l, m, n) ed (l', m', n') sono dipendenti $\iff$ (l, m, n) ed (l', m', n') sono proporzionali.

Per quanto riguarda l'ortogonalita' tra rette, si ha :

$r \perp r' \iff \mathbf{v} \perp \mathbf{v}' \iff$ (per la (2.3)) $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}' = 0 \iff$ (per la Proposizione 3.2) $l\,l' + m\,m' + n\,n' = 0$.

Ricordiamo che, assegnato un punto A ed una retta r, le rette per A ortogonali ad r sono tutte e sole le rette per A contenute nel piano per A ortogonale ad r.

ESEMPI

21.1. Consideriamo le rette r, r' ed r" rappresentate rispettivamente da :

$$r:\begin{cases} x = 2+t \\ y = -t \\ z = 1+2t \end{cases},\qquad r':\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases},\qquad r'':\begin{cases} 2y+z=0 \\ 2x-z-3=0 \end{cases}.$$

Le tre rette sono a due a due parallele in quanto una terna di numeri direttori di r è (1, -1, 2) , una terna di numeri direttori di r' è (-1, 1, -2) (componenti del vettore $\mathbf{v}(1, 1, 0) \times \mathbf{v}'(1, -1, -1)$) e una terna di numeri direttori di r" è (-2, 2, -4) (componenti del vettore $\mathbf{w}(0, 2, 1) \times \mathbf{w}'(2, 0, -1)$) e tali terne sono a due a due proporzionali.

Si ha inoltre che r ed r' sono impropriamente parallele, cioè coincidono, dato che passano entrambe per il punto A(2, 0, 1). Le rette r' ed r" sono invece propriamente parallele, in quanto il sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y-z=1 \\ 2y+z=0 \\ 2x-z=3 \end{cases}$ è incompatibile, essendo equivalente al sistema a gradini $\begin{cases} x+y=2 \\ 2y+z=1. \\ 0=1 \end{cases}$

21.2. Rappresentiamo la retta r' per il punto A(5, 1, -3) parallela alla retta $r:\begin{cases} x = t \\ y = 1+2t. \\ z = -t \end{cases}$

Possiamo scegliere come numeri direttori di r' la terna (1, 2, -1) di numeri direttori di r. Una rappresentazione parametrica di r' è allora : $\begin{cases} x = 5+t \\ y = 1+2t. \\ z = -3-t \end{cases}$

21.3. Consideriamo le rette r, r' ed r" rappresentate rispettivamente da :

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \quad r': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 \end{cases}, \quad r'': \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}.$$

Le rette r ed r' sono ortogonali in quanto $(-1, 2, 3) \bullet (2, 1, 0) = 0$, r' ed r" sono ortogonali in quanto $(2, 1, 0) \bullet (-1, 2, 1) = 0$, mentre r ed r" non sono ortogonali essendo $(-1, 2, 3) \bullet (-1, 2, 1) = 8 \neq 0$.

21.4. Assegnata la retta r rappresentata da $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$, determiniamo due rette per l'origine ortogonali ad r.

Poiché $(-3, 0, 1)$ è una terna di numeri direttori di r, allora una retta di numeri direttori (l, m, n) è ortogonale ad r se, e solo se, $(l, m, n) \bullet (-3, 0, 1) = 0$, cioè $-3l + n = 0$. Ad esempio, le rette rappresentate da $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 6t \end{cases}$ sono due rette distinte per O entrambe ortogonali ad r.

22. PARALLELISMO E ORTOGONALITA' TRA UNA RETTA E UN PIANO

Siano r una retta e π un piano. Ricordiamo che r e π sono *paralleli* se, e solo se, r è contenuta in π (*impropriamente* paralleli) oppure r e π non hanno punti in comune (*propriamente* paralleli). Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ è un vettore parallelo ad r e $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ è un vettore ortogonale a π, si ha :

$$r \parallel \pi \quad \Leftrightarrow \quad r \subseteq \pi \text{ oppure } r \cap \pi = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} \text{ è ortogonale a } \mathbf{w}.$$

Sia $ax + by + cz + d = 0$ un'equazione che rappresenta π. Per la Proposizione 16.3, il vettore **w**(a, b, c) è un vettore non nullo ortogonale a π. Dette allora (l, m, n) le componenti di **v**, si ha :

$r \parallel \pi \Leftrightarrow$ **v** è ortogonale a **w** $\Leftrightarrow$ (per la (2.3)) $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow$ (per la Proposizione 3.2) $a\,l + b\,m + c\,n = 0$.

Per quanto riguarda la condizione di ortogonalità tra una retta ed un piano, possiamo dire, mantenendo le stesse notazioni, che

$r \perp \pi \Leftrightarrow$ **v** è parallelo a **w** $\Leftrightarrow$ **v** e **w** sono dipendenti $\Leftrightarrow$ (l, m, n) e (a, b, c) sono proporzionali.

ESEMPI

22.1. Il piano π rappresentato dall'equazione $2x - y - 3z + 5 = 0$ e la retta r rappresentata dal sistema $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ sono paralleli , in quanto una terna di numeri direttori di r è $(1, -1, 1)$ e $2(1) - 1(-1) - 3(1) = 0$.

22.2. Il piano π rappresentato da $3x - y + 2z + 2 = 0$ e la retta r rappresentata parametricamente da $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$ sono ortogonali in quanto una terna di numeri direttori di r è $(-3, 1, -2)$ e tale terna è proporzionale alla terna $(3, -1, 2)$.

22.3. Considerato il punto $A(1, 1, -2)$ ed il piano π rappresentato da $2x + z - 4 = 0$, determiniamo la retta r per A ortogonale a π.

Poiché la terna (2, 0, 1) dei coefficienti delle incognite nell'equazione che rappresenta π è una terna di numeri direttori di ogni retta ortogonale a π, allora una rappresentazione parametrica di r è $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1 \\ z = -2+t \end{cases}$.

22.4. Considerato il punto A(-2, 1, 0) e le retta r rappresentata da $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$, rappresentiamo il piano π per A ortogonale ad r.

Poiché una terna di numeri direttori di r è (1, 1, 3), ogni piano ortogonale ad r può essere rappresentato da un' equazione del tipo $x + y + 3z + d = 0$. Imponendo il passaggio per A si ottiene $-2 + 1 + d = 0$, da cui $d = 1$. Ne segue che l'equazione $x + y + 3z + 1 = 0$ rappresenta π.

22.5. Consideriamo il punto A(1, -2, 3) e la retta r rappresentata da $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$. Poiché $A \notin r$, esiste una ed una sola retta s per A ortogonale ed incidente r. Rappresentiamo tale retta.

La retta s è contenuta sia nel piano π per A ortogonale ad r che nel piano π' per A e per r. Essendo (1, -1, 3) una terna di numeri direttori di r, il piano π può essere rappresentato da un'equazione del tipo $x - y + 3z + d = 0$; imponendo il passaggio per A, si ottiene $d = -12$, da cui $x - y + 3z - 12 = 0$ rappresenta π. Il piano π', che appartiene al fascio di piani di asse r , coincide con il piano di equazione $3x - z = 0$ poiché tale piano, che contiene r, contiene anche A in quanto le coordinate di A sono una soluzione dell'equazione $3x - z = 0$. Il sistema $\begin{cases} x - y + 3z - 12 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$ rappresenta dunque la retta s.

23. PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

Siano $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ due punti. Con un ragionamento analogo a quello usato nel caso del piano (cfr. Paragrafo 11), si prova che le coordinate (x_M, y_M, z_M) del *punto medio* M del segmento di estremi A e B sono:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z_M = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}.$$

24. DISTANZA TRA INSIEMI NELLO SPAZIO

Siano $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ due punti. La *distanza* d(A, B) *tra A e B* è, per definizione, il modulo del vettore **AB**. Per la (3.1) e la Proposizione 13.1 si ha : $d (A, B) = | \mathbf{AB} | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Siano S e T due insiemi di punti dello spazio. Così come nel caso del piano, diciamo *distanza tra S e T,* e la indichiamo con d(S, T), l'estremo inferiore dell'insieme numerico $\{d(P, Q), \text{con } P \in S \text{ e } Q \in T\}$; poniamo cioè:

$$d(S, T) = \inf \ \{ d (P, Q) : \ P \in S \ \text{e} \ Q \in T\}.$$

<u>Distanza punto – piano</u>

Siano A un punto e π un piano. Considerata la retta per A ortogonale a π e detto H il punto d'intersezione di tale retta con π, si ha : $d(A, \pi) = d(A, H)$.

Se (x_1, y_1, z_1) sono le coordinate di A e $ax + by + cz + d = 0$ è un'equazione che rappresenta π, risulta :

$$d (A, \pi) \ = \ | ax_1 + by_1 + cz_1 + d | \ / \ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ .$$

Distanza punto – retta

Siano A un punto ed r una retta. Detto π il piano per A ortogonale ad r e detto H il punto d'intersezione di π con r, si ha :

$$d(A, r) = d(A, H).$$

Distanza tra due rette

Siano r ed s due rette. Se r ed s sono incidenti, allora, chiaramente, $d(r, s) = 0$.

Se r ed s sono parallele, si ha : $d(r, s) = d(P, s)$, per ogni $P \in r$.

Supponiamo infine r ed s sghembe. Ricordiamo che due rette si dicono *sghembe* se esse non sono complanari (cioè non esiste nessun piano che le contiene entrambe), ovvero non sono né incidenti né parallele. In tal caso la distanza tra r ed s sarà la minima tra le lunghezze dei vettori **PQ**, al variare del punto P su r e del punto Q su s; essa si ottiene quando **PQ** è ortogonale sia ad r che ad s.

Distanza retta - piano

Siano r una retta e π un piano. Se r e π hanno intersezione non vuota (cioè hanno un sol punto in comune oppure r è contenuta in π), allora, ovviamente, $d(r, \pi) = 0$.

Se r e π sono propriamente paralleli, allora $d(r, \pi) = d(P, \pi)$, per ogni $P \in r$.

Distanza tra due piani

Siano π e π' due piani. Se π e π' hanno intersezione non vuota (cioè si intersecano in una retta o coincidono), allora, ovviamente, $d(\pi, \pi') = 0$.

Se π e π' sono propriamente paralleli, allora $d(\pi, \pi') = d(P, \pi')$, per ogni $P \in \pi$.

ESEMPI

24.1. Determiniamo la distanza del punto A(1, 3, -1) dal piano π rappresentato dall'equazione $2x - y + z - 4 = 0$.

Si ha : $d(A, \pi) = |\,2 - 3 - 1 - 4\,| / \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = |-6| / \sqrt{6} = \sqrt{6}$.

24.2. Determiniamo la distanza del punto A(1, 2, 0) dalla retta r rappresentata dal sistema $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z + 9 = 0 \end{cases}$.

Poiché (1, 1, 4) è una terna di numeri direttori della retta r, allora ogni piano ortogonale ad r può essere rappresentato da un'equazione del tipo $x + y + 4z + d = 0$. Imponendo che un tale piano passi per A, si ottiene $d = -3$. L'equazione $x + y + 4z - 3 = 0$ rappresenta dunque il piano π per A ortogonale ad r. La terna (x_H, y_H, z_H) delle coordinate del punto H intersezione di r con π è l'unica soluzione del sistema $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z + 9 = 0 \\ x + y + 4z - 3 = 0 \end{cases}$. Si ha : (x_H, y_H, z_H) = (-2, 1, 1), da cui

$$d(A, r) = d(A, H) = \sqrt{(1+2)^2 + (2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{11}.$$

24.3. Consideriamo le rette r ed s rappresentate rispettivamente dai sistemi $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$, essendo t e t' parametri reali.

i) Verifichiamo che r ed s sono sghembe;

ii) determiniamo la distanza tra r ed s.

i) Una terna di numeri direttori di r è (2, 1, -1) e una terna di numeri direttori di s è (0, -1, 1). Poiché tali terne non sono proporzionali, allora r ed s non sono parallele. Determiniamo ora una rappresentazione ordinaria per ciascuna delle due rette. Ricavando, ad esempio, t dalla seconda equazione del sistema che rappresenta r e sostituendo nelle altre due equazioni, si ottiene il sistema $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$ che rappresenta r in forma ordinaria. Analogamente si ottiene il sistema $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ che rappresenta s in forma ordinaria. La terna delle coordinate di un eventuale punto d'intersezione tra r ed s è una soluzione del sistema $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$. Essendo però tale sistema incompatibile, possiamo affermare che r ed s non sono incidenti. Non essendo dunque né parallele né incidenti, le rette r ed s sono sghembe.

ii) Il punto P(-1 + 2t, -2 + t, 1 - t) è il generico punto di r ed il punto Q(1, 1 - t', 2 + t') è il generico punto di s. Consideriamo il vettore **PQ**(2 - 2t, 3 - t' - t, 1 + t' + t). Si ha :

PQ $\perp$ r $\Leftrightarrow$ (2 - 2t, 3 - t' - t, 1 + t' + t) • (2, 1, -1) = 0 $\Leftrightarrow$ 6 - 6t -2t' = 0 ,

PQ $\perp$ s $\Leftrightarrow$ (2 - 2t, 3 - t' - t, 1 + t' + t) • (0, -1, 1) = 0 $\Leftrightarrow$ -2 + 2t + 2t' = 0.

Ne segue che **PQ** è ortogonale sia ad r che ad s se, e solo se, sono verificate entrambe le condizioni 6 - 6t -2t' = 0 e -2 + 2t + 2t' = 0, cioè se, e solo se, t =1 e t' = 0. Per t = 1 si ottiene il punto P_0(1, -1, 0) di r e per t' = 0 il punto Q_0(1, 1, 2) di s. Ne segue che d(r, s) = d(P_0, Q_0) = | $\mathbf{P_0Q_0}$| = $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

25. SFERA E CIRCONFERENZA

Fissato un punto C dello spazio e un numero reale r > 0, la *sfera* di centro C e raggio r è l'insieme $\mathcal{S}$ dei punti dello spazio aventi distanza r da C. Dette (x_o, y_o, z_o) le coordinate di C, si ha :

$$P(x, y, z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow d(C,P) = r \Leftrightarrow d^2(C,P) = r^2 \Leftrightarrow (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2.$$

L'equazione

(25.1) $$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2$$

rappresenta dunque la sfera $\mathcal{S}$.

Sviluppando la (25.1) e ponendo $a = -2x_o$, $b = -2y_o$, $c = -2z_o$ e $d = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r^2$, la (25.1) diventa

(25.2) $$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Osserviamo che i numeri reali a, b, c e d che compaiono nella (25.2) sono legati dalla relazione $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$; inoltre ogni equazione che si ottiene dalla (25.2) moltiplicandola per un numero reale non nullo rappresenta ancora la sfera $\mathcal{S}$.

Viceversa, data un'equazione del tipo $Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Bx + Cy + Dz + E = 0$, con A, B, C, D, E numeri reali e $A \neq 0$, questa si può scrivere, dividendo per A, nella forma (25.2). Sommando a entrambi i membri $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$, la (25.2) diventa $(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + (z + \frac{c}{2})^2 = \frac{a}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d$ e dunque rappresenta una sfera $\mathcal{S}$ se, e solo se, $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d > 0$ o, equivalentemente, $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$. In tal caso il centro di $\mathcal{S}$ è il punto $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ e il raggio di $\mathcal{S}$ è $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}$.

ESEMPI

25.1. Rappresentiamo la sfera $\mathcal{S}$ di centro $C(0, 4, -3)$ e raggio $r = 2$.
Per la (25.1) un'equazione che rappresenta la sfera $\mathcal{S}$ è $x^2 + (y - 4)^2 + (z + 3)^2 = 4$, cioè $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 6z + 21 = 0$.

25.2. L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 2 = 0$ **può essere scritta nella** forma $(x-1)^2 + (y + 3/2)^2 + (z + 2)^2 = 1 + \frac{9}{4} + 4 + 2$ **e dunque rappresenta la sfera** di centro $C(1, -3/2, -2)$ e raggio $r = \sqrt{1+\frac{9}{4}+4+2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$

25.3. L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + x - 6y + 4z + 30 = 0$ non rappresenta una sfera in quanto $1 + 36 + 16 - 120 = -67 < 0$.

Ricordiamo che esiste una ed una sola sfera passante per quattro punti non complanari. Ricordiamo inoltre che l'intersezione di un piano π con una sfera $\mathcal{S}$ è l'insieme vuoto (π *esterno* ad $\mathcal{S}$), è costituita da un unico punto (π *tangente* ad $\mathcal{S}$) oppure è una circonferenza (π *secante* $\mathcal{S}$) a seconda che la distanza di π dal centro di $\mathcal{S}$ è maggiore, uguale o minore del raggio di $\mathcal{S}$; se P è un punto di $\mathcal{S}$, esiste uno e un sol piano tangente ad $\mathcal{S}$ in P ed esso è il piano ortogonale alla retta per P e per il centro di $\mathcal{S}$.

Sia $\mathcal{S}$ una sfera, C il suo centro ed r il suo raggio. Se π è un piano che interseca $\mathcal{S}$ in una circonferenza $\mathcal{C}$, allora il centro C' di $\mathcal{C}$ è il punto di intersezione di π con la retta per C ortogonale a π ed il raggio di $\mathcal{C}$ è $\sqrt{r^2 - d^2(C,C')}$; inoltre la retta tangente a $\mathcal{C}$ in un suo punto P (cioè la retta di π avente il solo punto P in comune con $\mathcal{C}$) è l'intersezione di π con il piano tangente ad $\mathcal{S}$ in P. Se $\mathcal{S}$ è rappresentata dall'equazione (25.2) e π è rappresentato dall'equazione $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, allora $\mathcal{C}$ è rappresentata dal sistema

$$(25.3) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}.$$

Ne segue che ogni circonferenza dello spazio si può rappresentare con un sistema del tipo (25.3) in quanto essa si può sempre ottenere come intersezione di una sfera con un piano.

Viceversa, un sistema del tipo (25.3) rappresenta una circonferenza se, e solo se, la prima equazione rappresenta una sfera e la seconda equazione rappresenta un piano avente dal centro della sfera distanza minore del raggio.

ESEMPI

25.4. Considerata la sfera $\mathscr{S}$ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0$,

i) rappresentiamo il piano π tangente ad $\mathscr{S}$ nell'origine.

Il centro di $\mathscr{S}$ è $C(0, 2, 0)$. Il piano π è il piano per l'origine ortogonale alla retta OC, cioè al vettore $\mathbf{OC}(0, 2, 0)$; un'equazione che rappresenta π è dunque $y = 0$.

ii) determiniamo la posizione rispetto ad $\mathscr{S}$ del piano π' rappresentato dall'equazione $z - 2 = 0$.

Poiché il raggio r di $\mathscr{S}$ è 2 e $d(C, \pi') = 2$, allora π' è tangente ad $\mathscr{S}$. Il punto di tangenza è il punto $T(0, 2, 2)$ ottenuto intersecando π' con la retta passante per C ed ortogonale a π', retta rapprentata dal sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$.

iii) determiniamo la posizione rispetto ad $\mathscr{S}$ del piano π'' rappresentato dall'equazione $x - y = 0$.

Essendo $d(C, \pi'') = \sqrt{2} < 2 = r$, il piano π'' interseca $\mathscr{S}$ in una circonferenza $\mathscr{C}$. Il centro C' di $\mathscr{C}$ è l'intersezione di π'' con la retta per C ortogonale a π'', rappresentata dal sistema $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 0 \end{cases}$; ne segue che C' ha coordinate (1, 1, 0). Il raggio di $\mathscr{C}$ è $\sqrt{r^2 - d^2(C,C')} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$.

iv) rappresentiamo la retta tangente alla circonferenza $\mathscr{C}$ nel suo punto $P(2, 2, 0)$.

Poiché il piano tangente ad $\mathscr{S}$ in P è rappresentato dall'equazione $x - 2 = 0$, allora la retta richiesta è rappresentata dal sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$.

25.5. Rappresentiamo la circonferenza $\mathscr{C}$ passante per i punti non **allineati** $A(2, 0, 0)$, $B(0, 0, 3)$ e $C(0, 1, 3)$.

La circonferenza $\mathscr{C}$ si può ottenere come intersezione del piano π per A, B e C con una delle infinite sfere passanti per i tre punti dati. Il piano π è rappresentato dall'equazione $3x + 2z - 6 = 0$. Una sfera per i tre punti A, B e C ha un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, con (a, b, c, d) soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2a + d = -4 \\ 3c + d = -9 \\ b + 3c + d = -10 \end{cases}$$

ottenuto imponendo il passaggio della sfera per A, B e C. Tra le infinite sfere passanti per A, B e C, ne scegliamo una imponendo il passaggio per un punto non complanare con A, B e C (cioè non appartenente al piano π), ad esempio per l'origine. Otteniamo così il sistema

$$\begin{cases} 2a + d = -4 \\ 3c + d = -9 \\ b + 3c + d = -10 \\ d = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(-2, -1, -3, 0)$. Una sfera passante per $\mathscr{C}$ è dunque la sfera rappresentata dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - 3z = 0$. Ne segue che un sistema che rappresenta $\mathscr{C}$ è

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - 3z = 0 \\ 3x + 2z - 6 = 0 \end{cases}.$$

Testo destinato agli studenti dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II" i quali rimborseranno la somma di € 1,70 quale contributo per le sole spese di produzione.

Il presente volume fa parte della Collana di pubblicazioni didattiche dell'Ente regionale per il Diritto allo Studio Universitario "E.DI.S.U. Napoli 1"

1^ RISTAMPA RIVEDUTA E CORRETTA

Finito di stampare nel mese di Giugno 2004

Copie 1000 - pagg. 152

163