Esempi di dimostrazione per induzione

Prima di cominciare ricordo che ogni soluzione qui riportata è soltanto **una** *delle molteplici soluzioni. Se il lettore ne trova qualcuna diversa e magari più snella, meglio così (se poi me la comunica posso anche aggiungerla; inoltre gli sono grato anche se trova qualche errore in queste pagine). Buon lavoro. A.V.*

1) $\forall n \geq 3 \ \ 2n+1 < 2^n$.

base $2 \cdot 3 + 1 < 2^3$, vero.

step $2(n+1)+1 = 2n+2+1 = 2n+1+2 <^* 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

* usando l'ipotesi induttiva $2n+1 < 2^n$.

2) $\forall n \geq 1 \ \ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

base $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

step $\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) =^* \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} =^{**} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

* usando l'ipotesi induttiva $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

** facendo i calcoli nell'ultima frazione (che ci si aspetta), oppure scomponendo il polinomio nella penultima frazione.

3) $\forall n \geq 1 \ \ \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

(osserviamo che stiamo sommando i primi n numeri *dispari*)

base $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2$.

step $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \left(\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right) + (2(n+1)-1) =^* (n^2) + (2n+2-1) = n^2 + 2n + 1 =^{**} (n+1)^2$.

* usando l'ipotesi induttiva $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

** facendo i calcoli nell'ultima frazione (che ci si aspetta), oppure accorgendosi del quadrato di binomio nella penultima frazione.

4) $\forall n \geq 5 \ \ n^2 < 2^n$.

(notiamo che esercizi come questo o come l'es. 1 o il 5 possono essere affrontati ragionando sui limiti e sul comportamento all'infinito di certe funzioni. Invece nelle presenti soluzioni si riesce a provare l'asserto usando le semplici regole aritmetiche, senza cioè introdurre concetti superiori)

base $5^2 < 2^5$, vero.

step $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 <^* 2^n + 2n + 1 <^{**} 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

* usando l'ipotesi induttiva $n^2 < 2^n$.

** qui abbiamo usato la disuguaglianza $2n + 1 < 2^n$, che è stata dimostrata nell'esercizio 1 per ogni $n \geq 3$. In pratica abbiamo svolto un "sottoesercizio", come se esso fosse una sottoprocedura del programma principale, o un pacchetto predisposto.

Osserviamo che per dimostrare una disuguaglianza "stretta", cioè con il simbolo $<$ anziché $\leq$, è sufficiente produrre una catena di disuguaglianze o uguaglianze usando i simboli $<, \leq, =$ con il simbolo $<$ presente *almeno una volta*. Invece se la disuguaglianza da provare non è stretta, cioè è definita con il simbolo $\leq$, la catena *può non contenere* alcun simbolo $<$, cioè può anche consistere di soli $=$ o di soli $\leq$ o di entrambi.

5) $\forall n \geq 4 \;\; n^3 < 3^n$.

(notiamo che per $n = 1, 2$ la disuguaglianza è vera ma non lo è per $n = 3$. Se dunque usiamo $n = 1$ o $n = 2$ come base, ci illudiamo di partire bene ma poi siamo costretti a fermarci durante lo step, che non funziona per valori troppo piccoli di n come si vedrà nel seguito)

base $4^3 < 3^4$, vero.

step $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1 <^* 3^n+3n^2+3n+1 < 3^n+3n^2+3n+3 = 3^n + 3(n^2+n+1) <^{**} 3^n + 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n + 3^n < 3^n + 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$.

* usando l'ipotesi induttiva $n^3 < 3^n$.

** questa disuguaglianza segue da un sottoesercizio. Dimostriamo cioè che

$$\forall n \geq 4 \;\; n^2 + n + 1 < 3^{n-1}.$$

base $4^2 + 4 + 1 < 3^3$, vero.

(osserviamo che se avessimo considerato $n = 1$ o $n = 2$ questa seconda base non sarebbe stata soddisfatta e dunque lo step del "programma principale" non sarebbe stato soddisfatto, come avevamo anticipato sopra.

step $(n+1)^2+(n+1)+1 = n^2+2n+1+n+1+1 = (n^2+n+1)+2n+2 <^* 3^{n-1}+2n+2 < 3^{n-1}+3n+3 = 3^{n-1}+3(n+1) <^{**} 3^{n-1}+3 \cdot 3^{n-2} = 3^{n-1}+3^{n-1} < 3^{n-1} + 3^{n-1} + 3^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n = 3^{(n+1)-1}$.

* usando l'ipotesi induttiva $n^2 + n + 1 < 3^{n-1}$.

** questa disuguaglianza segue da un ulteriore sottoesercizio, cioè in effetti da un "sottosottoesercizio": dimostriamo che

$$\forall n \geq 4 \;\; n+1 < 3^{n-2}.$$

base $4+1 < 3^2$, vero.

step $(n+1)+1 <^* 3^{n-2}+1 < 3^{n-2}+3^{n-2}+3^{n-2} = 3 \cdot 3^{n-2} = 3^{n-1} = 3^{(n+1)-2}$.

* usando l'ipotesi induttiva $n+1 < 3^{n-2}$.

L'esercizio principale termina qui, ma ad esempio l'ultima fase si può accorciare come segue: dopo la prima disuguaglianza dello step del sottoesercizio si può dimostrare direttamente che $\forall n \geq 4 \;\; 2n+2 < 3^{n-1}+3^{n-1}$ o equivalentemente - dividendo per 2 entrambi i membri - che

$$\forall n \geq 4 \;\; n+1 < 3^{n-1}.$$

base $4+1 < 3^3$, vero.

step $(n+1)+1 <^* 3^{n-1}+1 < 3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n = 3^{(n+1)-1}$.

* usando l'ipotesi induttiva $n+1 < 3^{n-1}$.

6) $\forall n \geq 1 \;\; 8|(2n-1)^2-1$.

(il simbolo | significa "divide"; dunque l'enunciato si legge così : per ogni numero dispari d, il numero d^2-1 è divisibile per 8)

base $(2 \cdot 1-1)^2-1 = 0$ ed è chiaro che $8|0$ (invece, con l'occasione, non è vero che $0|8$. Perché?).

step $(2(n+1)-1)^2-1 = (2n+1)^2-1 =^* ((2n-1)+2)-1^2 = (2n-1)^2+4+4(2n-1)-1 = ((2n-1)^2-1)+4+4(2n-1) =^{**} 8h+4+4(2n-1) = 8h+4(1+2n-1) = 8h+4 \cdot 2n = 8h+8n = 8(h+n)$.

* qui - con un artificio - creiamo il binomio $2n-1$ che "non sarà toccato" nel passaggio successivo, al fine di applicare l'ipotesi induttiva.

** usando l'ipotesi induttiva $8|(2n-1)^2-1$, che equivale a $\exists h \; (2n-1)^2-1 = 8h$.

Notiamo che questo esercizio poteva essere facilmente affrontato senza l'aiuto dell'induzione, cioè svolgendo direttamente il calcolo di $(2n-1)^2-1$ e ragionando su elementari proprietà della divisibilità. In effetti il nostro approccio vuole avere soprattutto un valore didattico nei riguardi dell'induzione. Del resto questa non è la sede per valorizzare a sufficienza la reale portata del procedimento di induzione, che interviene di fatto in moltissime parti della matematica.

Gli esercizi terminano qui, ma vorrei far riflettere un attimo sul "mistero" degli artifici. Una domanda classica che mi si pone spesso, dopo aver mostrato un esercizio come il 6 o peggio il 5, è: ma come si fa a capire quale trasformazione si deve fare, come si può inventare un artificio utile? E' vero, occorre un po' di pratica. Ogni esercizio è sui generis (se non conoscete il latino non vi preoccupate, il significato della frase è "ogni esercizio è sui generis" - cosa vi ricorda questa osservazione?). In alcuni casi il procedimento sembra scorrere senza che ci si debba sforzare più di tanto, ma in altri casi si richiede una sorta di "invenzione". Concentriamoci sull'esercizio 5. Lo scopo dello **step** è dimostrare che $(n+1)^3 < 3^{n+1}$. Vediamo cosa accade. Dopo aver sviluppato il cubo di binomio si applica l'ipotesi induttiva, cosicché resta da provare la disuguaglianza

$$3^n + 3n^2 + 3n + 1 \leq 3^{n+1}.$$

Nel passaggio successivo si comincia a fare qualche modifica artificiosa, finché non si arriva alla tesi. In realtà tutta la sequenza di modifiche trae spunto da una formulazione equivalente della disuguaglianza, cioè da

$$3n^2 + 3n + 1 \leq 3^{n+1} - 3^n.$$

Poiché il secondo membro può scriversi come $3^n \cdot 3 - 3^n$ e dunque come $3^n(3-1)$ che è uguale a $3^n \cdot 2$, si scopre che il vero problema è dimostrare la disuguaglianza

$$3n^2 + 3n + 1 \leq 3^n \cdot 2.$$

Ecco che allora si comincia a modificare il primo membro. Si trasforma l'1 in 3 per mettere in evidenza il fattore 3 in comune ai due membri. In effetti ciò che verrà dimostrato è qualcosa di più forte, cioè che $3n^2+3n+1 < 3^n$, quindi senza il 2 e con la disuguaglianza *stretta* (questo è il sottoesercizio. Notiamo che il grado del polinomioè sceso a 2, e che nel sottosottoesercizio esso scende ancora, diventando 1. Quindi la complessità del problema è gradualmente ridotta).

Al di là dei vari aggiustamenti l'importante è avere un'idea del nocciolo del problema, così da modellare le quantità tenendo d'occhio l'obiettivo (facile a dirsi, vero?).