ESERCITAZIONE 1

IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

A) Esercizi svolti

1. Dimostrare che la somma delle prime n +1 potenze di un numero reale $q \neq 1$ è uguale a $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (cioè : dimostrare che $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$).

2. Dimostrare che : $2^n < n!$ $\quad \forall n \geq 4$

3. Dimostrare che ogni poligono con n lati ha $\frac{1}{2}n(n-3)$ diagonali.

4. Dimostrare , per induzione su n , che :
$\forall n \in \mathbb{N} \ , \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ , \exists \ q, r \in \mathbb{N} \ / \quad n = qm + r \ \ e \ \ 0 \leq r < m$

5. Dimostrare che la somma dei cubi dei primi n numeri è uguale al quadrato della somma dei primi n numeri , cioè :

$$1 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + \cdots + n)^2$$

Soluzioni

1) La proprietà da dimostrare è :

P(n): $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

P(1) è vera : infatti $1 + q = \frac{1-q^2}{1-q} = \frac{(1+q)(1-q)}{1-q}$

Supponiamo P(n) vera e dimostriamo P(n+1) , cioè dimostriamo che

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Infatti

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n+1} = (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} =$$

$$= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \qquad C.V.D.$$

2) La proprietà da dimostrare è :

P(n) : $2^n < n!$ $\quad (\forall n \geq 4)$

P(4) è vera : infatti $2^4 = 16$, $4! = 24$ e 16<24

Supponiamo vera P(n) e dimostriamo P(n+1) , cioè dimostriamo che

$2^{n+1} < (n+1)!$

Infatti :
$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!$ C.V.D.

3) La proprietà da dimostrare è :
P(n): se il poligono P ha n lati , allora P ha $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali .
La proprietà è vera per il minimo valore di n possibile (per avere un poligono) cioè n=3; infatti :
P(3) : Se P ha tre lati , ha zero diagonali .
Supponiamo che sia vera P(n) e dimostriamo che vale P(n+1) , cioè che se un poligono Q ha (n+1) lati , allora ha $\frac{(n+1)(n+1-3)}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ diagonali.
Partiamo da un poligono P di n lati , con vertici $A_1, \dots, A_n$, e formiamo il poligono Q aggiungendo
il vertice A_{n+1}.

Allora le diagonali di Q sono tutte quelle di P cui vanno aggiunte
1) A_1A_n (che in P non contava in quanto lato)
2) Le diagonali che congiungono A_{n+1} con $A_2, \dots, A_{n-1}$ e sono in numero di n-2.
Allora le diagonali di Q sono in numero di

$$\frac{n(n-3)}{2} + 1 + n - 2 = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$ C.V.D.

4) La proprietà da dimostrare è :

P(n): $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\exists\ q, r \in \mathbb{N}$ / $n = qm + r$ e $0 \le r < m$

P(0) è vera : $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $0 = 0 \cdot m + 0$ (si ha q=0 , r=0)

Sia vera P(n) , cioè $\exists\ q, r$: $n = qm + r$ con $0 \le r < m$; allora $n + 1 = qm + r + 1$

Sia $r' = r + 1$; sicuramente è $r' \ge 0$ (poiché $r \ge 0$)
Se $r' < m$, P(n+1) è vera (con $q' = q, r' = r + 1$); sennò, poiché r<m , può essere solo $r' = m$.
Allora $n + 1 = qm + m \Rightarrow n + 1 = (q+1)m$.
Dunque : P(n+1) è vera (con $q' = q + 1, r' = 0$) C.V.D.

5) La proprietà da dimostrare è :
P(n) : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$
Ricordando che $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

si può dimostrare la proprietà equivalente :

P(n) : $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

P(1) è vera , perché $1^3 = \dfrac{1^2 \cdot 2^2}{4}$

Supponiamo valida P(n) e dimostriamo P(n+1), cioè dimostriamo che

$1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Infatti:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad \text{C.V.D.}$$

B) Esercizi proposti

6. La somma dei primi n numeri interi diversi da 0 è uguale a $\dfrac{n(n+1)}{2}$, cioè:

$$1 + 2 + + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrare inoltre che , fissati due numeri reali a,b :

$$\sum_{k=0}^{n} (a+kb) = (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2} b.$$

7. La somma dei primi n numeri interi dispari è uguale n^2 :

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

8. Dimostrare, per induzione su n , che per ogni numero reale $a > -1$:

$$(1+a)^n \geq 1 + na \ .$$

9. *(Formula del binomio di Newton).*

Dimostrare , per induzione su n , che per ogni coppia di numeri reali a,b:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Suggerimento : si usi la formula :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

10. La somma dei quadrati dei primi n numeri è uguale a $\dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, cioè :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

11. Dimostrare che , per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ è pari.

12. Dimostrare che , per ogni $n \geq 6$:

$$2^n \cdot n! < n^n .$$

13. Trovare qual è l'errore nella dimostrazione per induzione della seguente proposizione (falsa, perché è in contraddizione conl' esercizio 6) :

Proposizione. P(n) è vera per ogni $n > 1$, dove

$$\mathrm{P(n)} : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

Dimostrazione. Supponiamo che P(n) sia vera. Allora :

$$1 + 2 + \cdot\cdot + n + (n+1) = \frac{1}{8}(2n+1)^2 + (n+1) = \frac{1}{8}(4n^2 + 12n + 9) = \frac{1}{8}(2(n+1)+1)^2$$

Ne segue che P(n) è vera per ogni $n > 1$.

14. *Attenzione a non fidarsi dei tentativi !!!.* Per esempio la proposizione P(n):
"Il numero $n^2 + n + 41$ è primo" è vera per ogni n<40 , ma è falsa per n=40.

Torna al Sommario