Appello Straordinario — Traccia A
10 aprile 2013

Nome ____________________ Cognome __________________________ Matricola _______________________

Esercizio A.1 *Sia* $W := \{2^n 3^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ *l'insieme dei numeri naturali che possono essere scritti come prodotto di una potenza di* 2 *per una potenza di* 3.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$2^n 3^m \mathcal{R} 2^s 3^t :\iff (n = s, m = t) \text{ oppure } (n = s = 0)$$

è una relazione d'equivalenza in W.

ii) Si determinino le classi [1], [2], [3], [4], [6], [9] *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo* $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ *definita da:*

$$2^n 3^m \mathcal{R}^* 2^s 3^t :\iff (n + m < s + t) \text{ oppure } (n = s, m = t)$$

è una relazione d'ordine in W.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ *è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.*

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W*:* $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 6\}$ *si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati* $(A, \mathcal{R}^*)$ *e* $(B, \mathcal{R}^*)$ *e si stabilisca se sono reticoli.*

ii) $[1] = \{3^m | m \in \mathbb{N}_0\} = [3] = [9]$, $[2] = \{2\}$, $[4] = \{4\}$, $[6] = \{6\}$. Le classi sono infinite.

iv) l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 18 e 12 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Il minimo è 1 che quindi è anche l'unico elemento minimale. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo (ad esempio non esiste $sup\{6, 4\}$, $(B, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo.

Esercizio A.2

– *Sia* $f : S \to T$ *una applicazione; si dimostri che* $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 7\mathbb{N}_0 \to \frac{x}{7} + 2 \in \mathbb{N}_0 \quad e \quad g : n \in \mathbb{N}_0 \to 2|n - 2| \in 2\mathbb{N}_0$$

i) si calcolino: $f(\{0, 7, 21\})$, $f(14\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0, 2, 9, 13\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$, $g(\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{0, 2, 4, 6, 8, 30\})$, $g^{-1}(2\mathbb{N}_0)$.

ii) Si stabilisca se f *e* g *sono iniettive e se sono suriettive.*

iii) Si determini l' applicazione composta gof*, si dimostri che è biettiva e si calcoli l'inversa* $(gof)^{-1}$.

i) $f(\{0, 7, 21\}) = \{2, 3, 5\}$, $f(14\mathbb{N}_0) = 2\mathbb{N}$, $f^{-1}(\{0, 2, 9, 13\}) = \{0, 49, 77\}$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = 7\mathbb{N}_0$, $g(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) = \{0, 2, 4, 6\}$, $g(\mathbb{N}_0) = 2\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0, 2, 4, 6, 8, 30\}) = \{0, 2, 4, 5, 6, 17\}$, $g^{-1}(2\mathbb{N}_0) = \mathbb{N}_0$

ii) f è iniettiva ma non è suriettiva (ad esempio non esiste alcun $x \in 7\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = 0$) , g non è iniettiva (infatti ad esempio $g(0) = 4 = g(4)$) ma è suriettiva.

iii) $gof : x \in 7\mathbb{N}_0 \to \frac{2x}{7} \in 2\mathbb{N}_0$ e $(gof)^{-1} : y \in 2\mathbb{N}_0 \to \frac{7y}{2} \in 7\mathbb{N}_0$.

Esercizio A.3

– *Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z:*

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - 2y = -3 \\ -3y + 5z = 2 \end{cases}$$

– *Si consideri la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

$S = \{(-\frac{24}{23}, \frac{21}{46}, \frac{31}{46})\}$; i) $detB = -45$, $\rho(B) = 3$; ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{11}{45} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = -(\lambda + 3)(3 - \lambda)(5 - \lambda)$, gli autovalori sono $-3, 3, 5$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(-3x, x, -\frac{7}{8}x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a 3 $\{(0, x, -2x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 5 $\{(0, 0, x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio A.4 *Si considerino i punti A e B dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate* $(-3, 1, 0)$ *e* $(1, -2, 5)$*, rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB contiene il punto P di coordinate $(7, 1, 2)$*.*

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $17x \equiv 2(mod 29)$*.*

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1101)_2$*,* $(431)_5$*;*

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che per ogni $n \geq 0$ si ha:

$$1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

i) La retta AB ha equazioni $x = -3 + 5t, y = 1, z = t$; ii) La retta non contiene il punto P. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[24]_{29}$ iv) 13,116.