I Appello— Traccia A

9 gennaio 2013

Nome ________________ Cognome ____________________ Matricola __________________

Esercizio A.1 *Per ogni intero positivo $n \in \mathbb{N}$ si denoti con $h(n)$ l'esponente della massima potenza di 2 che divide n; sia cioè $n = 2^{h(n)}t_n$ con t_n dispari.*

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ definita da:

$$n\mathcal{R}m :\Longleftrightarrow |h(n) - h(m)| \in 3\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in $\mathbb{N}$.

ii) Si determinino le classi $[1]$, $[2]$, $[10]$, $[12]$, $[24]$, $[8]$ e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ definita da:

$$n\mathcal{R}^*m :\Longleftrightarrow h(n) = h(m) \text{ e } t_n \leq t_m$$

è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}$.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 12, 24\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(A, \mathcal{R}^*)$ e $(B, \mathcal{R}^*)$ e si stabilisca se sono reticoli.

ii) $[1] = [24] = [8] = \{2^{h(n)}t_n | t_n \text{ è dispari}, h(n) \equiv 0(3)\}$; $[2] = [10] = \{2^{h(n)}t_n | t_n \text{ è dispari}, h(n) \equiv 1(3)\}$; $[12] = \{2^{h(n)}t_n | t_n \text{ è dispari}, h(n) \equiv 2(3)\}$. Le classi sono 3.

iv) l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 2 e 4 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutte le potenze di 2. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo perchè è totalmente ordinato, $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo ad esempio non esiste $sup\{2, 4\}$.

Esercizio A.2 *Sia $f : S \to T$ una applicazione e siano $Y_1, Y_2 \subseteq T$, $X_1, X_2 \subseteq S$. Si dimostri che:*

– $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$

– $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$ *e tale inclusione potrebbe essere stretta.*

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : z \in \mathbb{Z} \to |5z - 15| \in 5\mathbb{N}_0 \quad e \quad g : x \in 5\mathbb{N}_0 \to \frac{x + 15}{5} \in \mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 1, -2, 3, -3, 5, 6\})$, $f(\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 5, 10, 15\})$, $f^{-1}(5\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 5, 15, 25\})$, $g(5\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{0, -1, -3, 1, 3, 4\})$, $g^{-1}(\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte gof e fog, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.

i) $f(\{0, 1, -2, 3, -3, 5, 6\}) = \{15, 10, 25, 0, 30\}$, $f(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{N}_0$, $f^{-1}(\{0, 5, 10, 15\}) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f^{-1}(5\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$, $g(\{0, 5, 15, 25\}) = \{3, 4, 6, 8\}$, $g(5\mathbb{N}_0) = \{m \in \mathbb{N}_0 | m \geq 3\}$, $g^{-1}(\{0, -1, -3, 1, 3, 4\}) = \{0, 5\}$, $g^{-1}(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{N}_0$

ii) f non è iniettiva perchè ad esempio $f(0) = 15 = f(6)$, f è suriettiva , g è iniettiva ma non è suriettiva perchè ad esempio non esiste alcun elemento di $5\mathbb{N}_0$ la cui immagine sia 0.

iii) $gof : y \in \mathbb{Z} \to |y - 3| + 3 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè g non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè f non lo è)quindi non è biettiva; invece fog è l'applicazione identica di $5\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

Esercizio A.3

– Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z e t:

$$\begin{cases} y + 2z + 2t = -1 \\ 3x + 7z + 4t = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

– Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & \sum_{i=0}^{n-1} 3^i \cdot 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

$S = \{(t + \frac{21}{6}, 2, -t - \frac{3}{2}, t) | t \in \mathbb{R}\}$; i) $det B = 21$, $\rho(B) = 3$; ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{7} \\ 0 & -1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)(7 - \lambda)$, gli autovalori sono $-3, -1, 7$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a -1 $\{(x, 2x, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 7 $\{(\frac{61}{80}z, \frac{5}{8}z, z) | z \in \mathbb{R}, z \neq 0\}$

Esercizio A.4 *Si considerino i punti A, B, C, D dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate* $(1, -3, 5)$, $(0, -6, 17)$, $(2, 0, -7)$, $(1, 1, 1)$ *rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB e CD.

ii) Si stabilisca se le rette AB e CD sono parallele, sghembe o incidenti determinando, in quest'ultimo caso, le coordinate del punto di intersezione.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $7x \equiv 3(mod 15)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(101)_2$, $(211)_3$;

v) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 323.

i) La retta AB ha equazioni x=1-t, y=-3-3t, z=5+12t; la retta CD ha equazioni x=2-t, y=t, z=-7+8t. ii) Le due rette sono incidenti e il punto comune alle due rette è C. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[9]_{15}$ iv) 5,22; v) $(101000011)_2$, $(2243)_5$

Corso di Matematica Discreta e Logica Matematica

I Appello— Traccia B

9 gennaio 2013

Nome ________________ Cognome ____________________ Matricola __________________

Esercizio B.1 *Per ogni intero positivo* $n \in \mathbb{N}$ *si denoti con* $h(n)$ *l'esponente della massima potenza di* 3 *che divide* n*; sia cioè* $n = 3^{h(n)} t_n$ *con* $t_n \notin 3\mathbb{N}$.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$n\mathcal{R}m :\iff |h(n) - h(m)| \in 2\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in $\mathbb{N}$.

ii) Si determinino le classi [1], [15], [21], [18], [54], [81] *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo* $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ *definita da:*

$$n\mathcal{R}^*m :\iff h(n) = h(m) \ \text{e} \ t_n \leq t_m$$

è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}$.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ *è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.*

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$*:* $A = \{1, 2, 5, 7\}$ *e* $B = \{3, 9, 15, 27, 45, 135\}$ *si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati* $(A, \mathcal{R}^*)$ *e* $(B, \mathcal{R}^*)$ *e si stabilisca se sono reticoli.*

ii) $[1] = [18] = [81] = \{3^{h(n)} t_n | t_n \notin 3\mathbb{N}, h(n) \equiv 0(2)\}$; $[21] = [15] = [54] = \{3^{h(n)} t_n | t_n \notin 3\mathbb{N}, h(n) \equiv 1(2)\}$. Le classi sono 2.

iv) l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 3 e 9 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutte le potenze di 3. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo perchè è totalmente ordinato, $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo ad esempio non esiste $sup\{3, 9\}$.

Esercizio B.2 *Sia* $f : S \to T$ *una applicazione e siano* $Y_1, Y_2 \subseteq T$*,* $X_1, X_2 \subseteq S$*. Si dimostri che:*

– $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

– $f(X_1) \setminus f(X_2) \subseteq f(X_1 \setminus X_2)$ *e tale inclusione potrebbe essere stretta.*

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : z \in \mathbb{Z} \to |7z - 14| \in 7\mathbb{N}_0 \quad e \quad g : x \in 7\mathbb{N}_0 \to \frac{x + 14}{7} \in \mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 1, -2, 2, -3, 4, 3\})$*,* $f(\mathbb{Z})$*,* $f^{-1}(\{0, 7, 14, 21\})$*,* $f^{-1}(7\mathbb{N}_0)$*,* $g(\{0, 7, 21, 49\})$*,* $g(7\mathbb{N}_0)$*,* $g^{-1}(\{0, -1, -2, 1, 2, 5\})$*,* $g^{-1}(\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f *e* g *sono iniettive e se sono suriettive.*

iii) Si determinino le applicazioni composte gof *e* fog*, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.*

i) $f(\{0, 1, -2, 2, 3, -3, 4\}) = \{14, 7, 28, 0, 35\}$, $f(\mathbb{Z}) = 7\mathbb{N}_0$, $f^{-1}(\{0, 7, 14, 21\}) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, -1\}$, $f^{-1}(7\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$, $g(\{0, 7, 21, 49\}) = \{2, 3, 5, 9\}$, $g(7\mathbb{N}_0) = \{m \in \mathbb{N}_0 | m \geq 2\}$, $g^{-1}(\{0, -1, -2, 2, 5\}) = \{0, 21\}$, $g^{-1}(\mathbb{Z}) = 7\mathbb{N}_0$

ii) f non è iniettiva perchè ad esempio $f(0) = 14 = f(4)$, f è suriettiva , g è iniettiva ma non è suriettiva perchè ad esempio non esiste alcun elemento di $7\mathbb{N}_0$ la cui immagine sia 0.

iii) $gof : y \in \mathbb{Z} \to |y - 2| + 2 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè g non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè f non lo è)quindi non è biettiva; invece fog è l'applicazione identica di $7\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

Esercizio B.3

– *Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z e t*

$$\begin{cases} -7y + z + 8t = 1 \\ 5x - 3z - 3t = 0 \\ 12x - 2z - 2t = 4 \end{cases}$$

– *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$A^n = \begin{pmatrix} 4^n & \sum_{i=0}^{n-1} 4^i \cdot 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

– *Si consideri la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

$S = \{(\frac{6}{13}, t - \frac{3}{91}, -t + \frac{10}{13}, t) | t \in \mathbb{R}\}$; i) $detB = -12$, $\rho(B) = 3$; ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = (3 - \lambda)(-\lambda - 1)(4 - \lambda)$, gli autovalori sono $3, -1, 4$. Gli autovettori relativi a -1 sono $\{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$; quelli relativi a 4 sono $\{(x, \frac{5}{3}x, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 3 $\{(x, 4x, -4x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio B.4

– *Si considerino i punti A, B, C, D dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate* $(-4, 2, 0)$, $(1, 2, -1)$, $(-9, 2, 1)$, $(3, -5, 1)$ *rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB e CD.

ii) Si stabilisca se le rette AB e CD sono parallele, sghembe o incidenti determinando, in quest'ultimo caso, le coordinate del punto di intersezione.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $11x \equiv 2(mod 21)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(111)_2$, $(122)_3$;

v) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 735.

i) La retta AB ha equazioni x=-4+5t, y=2, z=-t; la retta CD ha equazioni x=-9+12t, y=2-7t, z=1. ii) Le due rette sono incidenti e il punto comune alle due rette è C. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[4]_{21}$ iv) 7,17; v) $(1011011111)_2$, $(10420)_5$