II Appello— Traccia A

29 gennaio 2013

Nome ____________ Cognome ________________ Matricola ______________

Esercizio A.1 *Si consideri l'insieme V costituito dai numeri naturali del tipo $3h+1$ con $h \in \mathbb{N}_0$:*

$$V := \{3h + 1 | h \in \mathbb{N}_0\}$$

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ definita da:

$$3h + 1\mathcal{R}3k + 1 :\Longleftrightarrow |h - k| \in 2\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in V.

ii) Si determinino le classi $[1]$, $[4]$, $[7]$, $[10]$ *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$.*

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ definita da:

$$3h + 1\mathcal{R}^*3k + 1 :\Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}_0 : k = ht \ \ (h \text{ divide } k)$$

è una relazione d'ordine in V.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(V, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$: $A = \{1, 4, 7, 10\}$ e $B = \{4, 7, 10, 13, 28\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(A, \mathcal{R}^*)$ e $(B, \mathcal{R}^*)$ e si stabilisca se sono reticoli.

Esercizio A.2

– Siano $f : S \to T$ e $g : T \to W$ applicazioni; si dimostri che se f e g sono iniettive, allora anche gof è iniettiva.

– Considerate le applicazioni:

$$f : x \in 5\mathbb{Z} \to \frac{|x|}{5} \in \mathbb{N}_0 \quad e \quad g : n \in \mathbb{N}_0 \to 5n - 15 \in 5\mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 5, -5, -15, 10\})$, $f(5\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$,
$g(\{0, 1, 2, 3, 4\})$, $g(\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{0, 5, -5, -30, -25\})$, $g^{-1}(5\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte gof e fog, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive.

Esercizio A.3

– Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z e t:

$$\begin{cases} x - 3z - t = 1 \\ 3y + 5z + t = 0 \\ y + z + 3t = 2 \end{cases}$$

– Sia

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$A^n = \begin{pmatrix} 7^n & 0 & \sum_{i=0}^{n-1} 7^i \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– *Si consideri la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 11 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B *è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli* B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

Esercizio A.4 *Si considerino i punti* A, B, C, D *dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate* $(3, -1, 5)$, $(-7, 0, 4)$, $(-6, 4, -3)$, $(4, 3, -2)$ *rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB *e* CD.

ii) Si stabilisca se le rette AB *e* CD *sono parallele, sghembe o incidenti.*

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $6x \equiv 7(mod 11)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1000)_2$, $(212)_3$;

v) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 286.

Corso di Matematica Discreta e Logica Matematica

II Appello— Traccia B

29 gennaio 2013

Nome ________________ Cognome ____________________ Matricola ___________________

Esercizio B.1 *Si consideri l'insieme* V *costituito dai numeri naturali del tipo* $5h+1$ *con* $h \in \mathbb{N}_0$:

$$V := \{5h + 1 | h \in \mathbb{N}_0\}$$

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$5h + 1\mathcal{R}5k + 1 :\Longleftrightarrow\ |h - k| \in 2\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in V.

ii) Si determinino le classi $[1]$, $[6]$, $[11]$, $[16]$ *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo* $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ *definita da:*

$$5h + 1\mathcal{R}^*5k + 1 :\Longleftrightarrow\ \exists t \in \mathbb{N}_0 : k = ht\ \ (h \text{ divide } k)$$

è una relazione d'ordine in V.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(V, \mathcal{R}^*)$ *è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.*

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$: $A = \{1, 6, 11, 16\}$ *e* $B = \{6, 11, 16, 21, 46\}$ *si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati* $(A, \mathcal{R}^*)$ *e* $(B, \mathcal{R}^*)$ *e si stabilisca se sono reticoli.*

Esercizio B.2

– *Siano* $f : S \to T$ *e* $g : T \to W$ *applicazioni; si dimostri che se* f *e* g *sono suriettive, allora anche* gof *è suriettiva.*

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 7\mathbb{Z} \to \frac{|x|}{7} \in \mathbb{N}_0 \quad e \quad g : n \in \mathbb{N}_0 \to 7n - 21 \in 7\mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 7, -7, -21, 14\})$, $f(7\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 1, 2, 3, 4\})$, $g(\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{0, 7, -7, -42, -35\})$, $g^{-1}(7\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f *e* g *sono iniettive e se sono suriettive.*

iii) Si determinino le applicazioni composte gof *e* fog*, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive.*

Esercizio B.3

– Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x*,* y*,* z *e* t*:*

$$\begin{cases} x - 2z - t = 5 \\ 2y - z + t = 0 \\ 4y + z + t = -1 \end{cases}$$

– Sia

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ *si ha:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 11^n & 0 & \sum_{i=0}^{n-1} 11^i \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B*.*

ii) Si stabilisca se B *è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli* B^{-1}*.*

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B*.*

Esercizio B.4

– Si considerino i punti A*,* B*,* C*,* D *dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate* $(2, 1, -3)$, $(0, 0, 11)$, $(6, -1, -2)$, $(8, 2, -16)$ *rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB *e* CD*.*

ii) Si stabilisca se le rette AB *e* CD *sono parallele, sghembe o incidenti.*

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $9x \equiv 21 (mod 23)$*.*

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1011)_2$, $(222)_3$*;*

v) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 456.