III Appello — Traccia A

19 febbraio 2013

Nome ____________________ Cognome __________________________ Matricola ______________________

Esercizio A.1 *Data la formula*

$$B \to (A \vee (\neg B \to A))$$

1. *Utilizzando le tavole di verità dire se la formula è una tautologia.*
2. *Utilizzando la tavola di verità scriverla in forma normale disgiuntiva.*
3. *Tramite equivalenze logiche ridurla a forma normale congiuntiva.*

Soluzione:

1.

A	B	$\neg B$	$\neg B \to A$	$A \vee (\neg B \to A))$	$B \to (A \vee (\neg B \to A))$
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1

È una tautologia.

2. $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B) \quad (\equiv \top)$.

3.

$$\begin{aligned}
&B \to (A \vee (\neg B \to A)) \equiv \\
&\neg B \vee (A \vee (B \vee A)) \equiv \\
&\neg B \vee A \vee B \vee A \equiv \\
&\neg B \vee B \vee A \equiv \\
&\top \vee A \equiv \\
&\top.
\end{aligned}$$

Esercizio A.2 *Si consideri la formula*

$$(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \to (\exists x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \to (P(x) \wedge \neg P(x))) \ .$$

i) Fissata l'interpretazione

$$D = \mathbb{N}, \quad P(n) \Leftrightarrow n \text{ è pari}, \quad Q(n) \Leftrightarrow n \text{ è dispari}, \mathcal{I}(x) = 3$$

scrivere tutti i passaggi che portano all'interpretazione della formula e dire se è vera o falsa.

ii) Rinominando il minor numero possibile di variabili, trasformare la formula del primo ordine sopra in forma normale prenessa.

iii) Utilizzando il metodo degli alberi semantici ***dire*** *se la formula è una tautologia del primo ordine.*

Soluzione:

i)

$$
\begin{array}{lr}
\mathbb{N} \models (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\exists x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \rightarrow (P(x) \wedge \neg P(x))) & \text{sse} \\
\mathbb{N} \models \neg\,(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \vee \neg\,(\exists x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (P(x) \wedge \neg P(x))) & \text{sse} \\
\mathbb{N} \models (\exists x \neg P(x) \vee \exists x \neg Q(x)) \vee (\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge \neg P(x))) & \text{sse} \\
\mathbb{N} \models \exists x \neg P(x) \text{ o } \mathbb{N} \models \exists x \neg Q(x) \text{ o } \mathbb{N} \models \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \text{ o } \mathbb{N} \models P(x) \wedge \neg P(x) & \text{sse}
\end{array}
$$

C'è un $m \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \not\models P(m)$ o c'è un $l \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \not\models Q(l)$ o per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{N} \models P(n)$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \models Q(k)$ o $\mathbb{N} \models P(lx)$ e $\mathbb{N} \models \neg P(x)$ sse

C'è un un numero naturale m che non è pari o c'è un numero naturale l che non è dispari o per qualsiasi numero n è pari e qualsiasi numero k è dispari o 3 è pari e 3 è dispari.

La formula è vera perché la prima parte della disgiunzione è vera in $\mathbb{N}$. (Ma si noti che la formula è una tautologia del primo ordine, quindi vera in qualsiasi struttura).

ii)

$$
\begin{array}{l}
(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\exists x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \rightarrow (P(x) \wedge \neg P(x))) \equiv \\
\neg\,(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \vee \neg\,(\exists x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (P(x) \wedge \neg P(x))) \equiv \\
(\exists x \neg P(x) \vee \exists x \neg Q(x)) \vee (\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge \neg P(x))) \equiv \\
(\exists y \neg P(y) \vee \neg Q(y)) \vee (\forall z(P(z) \wedge Q(z)) \vee (P(x) \wedge \neg P(x))) \equiv \\
\exists y\,((\neg P(y) \vee \neg Q(y)) \vee (\forall z(P(z) \wedge Q(z)) \vee (P(x) \wedge \neg P(x)))) \equiv \\
\exists y \forall z\,((\neg P(y) \vee \neg Q(y)) \vee (P(z) \wedge Q(z)) \vee (P(x) \wedge \neg P(x))) \equiv
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}((\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\exists x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \rightarrow (P(x) \wedge \neg P(x))))^* \\
| \\
\mathrm{V}(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))^* \\
| \\
\mathrm{F}(\exists x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \rightarrow (P(x) \wedge \neg P(x)))^* \\
| \\
\mathrm{V}(\exists x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)))^* \\
| \\
\mathrm{F}(P(x) \wedge \neg P(x)) \\
| \\
\mathrm{V}(P(x)) \\
| \\
\mathrm{V}(\forall x P(x)) \\
| \\
\mathrm{V}(\forall x Q(x)) \\
| \\
\mathrm{V}(\neg P(c_1) \vee \neg Q(c_1))^* \\
\begin{array}{cc}
\mathrm{V}(\neg P(c_1))^* & \mathrm{V}(\neg Q(c_1))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(P(c_1)) & \mathrm{F}(Q(c_1)) \\
| & | \\
\mathrm{V}(P(c_1)) & \mathrm{V}(P(c_1)) \\
| & | \\
=== & ===
\end{array}
\end{array}
$$

iii)

È una tautologia perché si chiudono tutti i rami.

Esercizio A.3 *Sia* $\mathbb{P}$ *l'insieme dei numeri primi in* $\mathbb{N}_0$ *e si consideri l'insieme*

$$W := \{p_1p_2 | p_1, p_2 \in \mathbb{P}, p_1 \leq p_2\}$$

dei numeri naturali della forma p_1p_2 *con* $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, $p_1 \leq p_2$.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$p_1p_2\mathcal{R}q_1q_2 :\iff (p_1 = q_1) \text{ oppure } (p_1q_1 = 15)$$

è una relazione d'equivalenza in W.

ii) Si determinino le classi $[4]$, $[6]$, $[9]$, $[21]$, $[25]$ *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo* $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ *definita da:*

$$p_1p_2\mathcal{R}^*q_1q_2 :\iff (p_1 = q_1) \text{ e } (p_2 \leq q_2)$$

è una relazione d'ordine in W.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ *è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.*

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W: $A = \{4, 6, 10, 14\}$ *e* $B = \{4, 6, 9, 15, 21\}$ *si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati* $(A, \mathcal{R}^*)$ *e* $(B, \mathcal{R}^*)$ *e si stabilisca se sono reticoli.*

Soluzione: ii) $[4] = [6] = \{p_1p_2 \in W | p_1 = 2\}$, $[9] = [21] = [25] = \{p_1p_2 | p_1 = 3 \text{ oppure } p_1 = 5\}$. Le classi sono infinite.

iv) l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 6 e 9 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutti gli elementi del tipo p^2 con $p \in \mathbb{P}$. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo perchè è totalmente ordinato, $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo ad esempio non esiste $sup\{6, 21\}$.

Esercizio A.4

– *Siano* $f : S \to T$ *e* $g : T \to W$ *applicazioni; si dimostri che se* gof *è iniettiva, allora* f *è iniettiva.*

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 3\mathbb{Z} \to \frac{|x + 21|}{3} \in \mathbb{N}_0 \quad e \quad g : n \in \mathbb{N}_0 \to 3n - 21 \in 3\mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 3, -3, -39\})$, $f(3\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 5, 7\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 1, 7, 8\})$, $g(\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{-21, -24, -27\})$, $g^{-1}(3\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f *e* g *sono iniettive e se sono suriettive.*

iii) Si determinino le applicazioni composte gof *e* fog*, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive.*

Soluzione: i) $f(\{0, 3, -3, -39\}) = \{7, 8, 6\}$, $f(3\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$, $f^{-1}(\{0, 5, 7\}) = \{-21, -6, -36, 0, -42\}$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = 3\mathbb{Z}$, $g(\{0, 1, 7, 8\}) = \{-21, -18, 0, -3\}$, $g(\mathbb{N}_0) = \{z \in 3\mathbb{Z} | z \geq -21\}$, $g^{-1}(\{-21, -24, -27\}) = \{0\}$, $g^{-1}(3\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$

ii) f non è iniettiva perchè ad esempio $f(-3) = 6 = f(-39)$, f è suriettiva , g è iniettiva ma non è suriettiva perchè ad esempio non esiste alcun elemento di $\mathbb{N}_0$ la cui immagine sia -27.

iii) $gof : y \in 3\mathbb{Z} \to |x + 21| - 21 \in 3\mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè g non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè f non lo è)quindi non è biettiva; invece fog è l'applicazione identica di $\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

Esercizio A.5

– *Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite* x, y, z:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ y + 5z = 2 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

– *Si consideri la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 11 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B *è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli* B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

Soluzione: $S = \{(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})\}$; i) $detB = 21$, $\rho(B) = 3$; ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{11}{21} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{19}{21} & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)(7 - \lambda)$, gli autovalori sono $-3, -1, 7$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(0, x, -x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a -1 $\{(0, 0, x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 7 $\{(x, \frac{11}{10}x, \frac{3}{40}x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio A.6 *Si considerino i punti* A *e* B *dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate* $(3, 0, -1)$ *e* $(1, -2, 5)$*, rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB *contiene l'origine del riferimento .*

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $13x \equiv 5(mod 21)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(11001)_2$, $(122)_3$;

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$*, che per ogni* $n \geq 1$ *si ha:*

$$14 + 27 + \cdots + (13n + 1) = \frac{13n^2 + 15n}{2}$$

Soluzione: i) La retta AB ha equazioni $x = 3 - 2t, y = -2t, z = -1 + 6t$; ii) La retta non contiene l'origine. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[2]_{21}$ iv) 25,17.

III Appello — Traccia B

19 febbraio 2013

Nome ______________ Cognome __________________ Matricola ________________

Esercizio B.1 *Data la formula*

$$(A \wedge (\neg A \vee B)) \rightarrow (A \wedge B)$$

1. *Utilizzando le tavole di verità dire se la formula è una tautologia.*
2. *Utilizzando la tavola di verità scriverla in forma normale disgiuntiva.*
3. *Tramite equivalenze logiche ridurla a forma normale congiuntiva.*

Soluzione:

1.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \wedge (\neg A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$A \wedge (\neg A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1

2. $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B) \quad (\equiv \top)$.

3.

$$\begin{aligned}
&(A \wedge (\neg A \vee B)) \rightarrow (A \wedge B) \equiv \\
&\neg(A \wedge (\neg A \vee B)) \vee (A \wedge B) \equiv \\
&(\neg A \vee (A \wedge \neg B)) \vee (A \wedge B) \equiv \\
&(A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee (A \wedge B) \equiv \\
&((\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee (A \wedge B) \equiv \\
&(\top \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee (A \wedge B) \equiv \\
&\neg A \vee \neg B \vee (A \wedge B) \equiv \\
&\neg A \vee ((\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee B)) \equiv \\
&\neg A \vee ((\neg B \vee A) \wedge \top) \equiv \\
&\neg A \vee \neg B \vee A \quad (\equiv \top)\ .
\end{aligned}$$

Esercizio B.2 *Si consideri la formula*

$$(\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))\ .$$

i) Fissata l'interpretazione

$$D = \mathbb{Z}, \quad P(n) \Leftrightarrow n \text{ è divisibile per 7}, \quad Q(n) \Leftrightarrow n \text{ è un numero primo}$$

scrivere tutti i passaggi che portano all'interpretazione della formula e dire se è vera o falsa.

ii) Rinominando il minor numero possibile di variabili, trasformare la formula del primo ordine sopra in forma normale prenessa.

iii) Utilizzando il metodo degli alberi semantici ***dire*** *se la formula è una tautologia del primo ordine.*

Soluzione:

i)

$$
\begin{array}{lr}
\mathbb{Z} \models (\forall x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x (P(x) \vee Q(x)) & \text{sse} \\
\mathbb{Z} \models \neg\,(\neg\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)) \vee \exists x (P(x) \vee Q(x)) & \text{sse} \\
\mathbb{Z} \models (\forall x P(x) \wedge \forall x \neg Q(x)) \vee \exists x (P(x) \vee Q(x)) & \text{sse} \\
\mathbb{Z} \models \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x (P(x) \vee Q(x)) & \text{sse} \\
\mathbb{Z} \models \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(x)) \text{ o } \mathbb{Z} \models \exists x (P(x) \vee Q(x)) & \text{sse} \\
\mathbb{Z} \models \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(x)) \text{ o } \mathbb{Z} \models \exists x (P(x) \vee Q(x)) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } m \in \mathbb{Z}\ \mathbb{Z} \models (P(m) \wedge \neg Q(m)) \text{ o esiste } n \in \mathbb{Z}\ \mathbb{Z} \models (P(n) \vee Q(n)) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } m \in \mathbb{Z}\ \mathbb{Z} \models P(m) \text{e } \mathbb{Z} \models \neg Q(m) \text{ o esiste } n \in \mathbb{Z}\ \mathbb{Z} \models P(n) \text{ o } \mathbb{Z} \models Q(n) & \text{sse}
\end{array}
$$

Per ogni numero intero m o m è divisibile per 7 e non è numero primo, oppure esiste un numero naturale n che o è divisibile per sette o è primo.

La formula è vera perché la seconda parte della disgiunzione è vera in $\mathbb{Z}$, infatti il numero $14 \in \mathbb{Z}$ è divisibile per sette.

ii)

$$
\begin{array}{c}
(\forall x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \\
\neg\,(\neg\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)) \vee \exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \\
(\forall x P(x) \wedge \forall x \neg Q(x)) \vee \exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \\
\forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists y (P(y) \vee Q(y)) \equiv \\
\forall x \exists y ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (P(y) \vee Q(y)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}((\forall x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x (P(x) \vee Q(x)))^* \\
| \\
\mathrm{V}(\forall x P(x) \to \exists x Q(x))^* \\
| \\
\mathrm{F}(\exists x (P(x) \vee Q(x)))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\mathrm{V}(\forall x P(x)) & \mathrm{F}(\exists x Q(x))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}((P(c_1) \vee Q(c_1)))^* & \mathrm{F}((P(c_1) \vee Q(c_1)))^* \\
| & | \\
\mathrm{F}(P(c_1)) & \mathrm{F}(P(c_1)) \\
| & | \\
\mathrm{F}(Q(c_1)) & \mathrm{F}(Q(c_1)) \\
| & | \\
\mathrm{V}(P(c_1)) & \mathrm{F}(Q(c_1)) \\
| & \\
=== &
\end{array}
$$

iii)

Non è una tautologia perché non si chiudono tutti i rami.

Esercizio B.3 *Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi in $\mathbb{N}_0$ e si consideri l'insieme*

$$W := \{p_1 p_2 | p_1, p_2 \in \mathbb{P}, p_1 \leq p_2\}$$

dei numeri naturali della forma $p_1 p_2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, $p_1 \leq p_2$.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ definita da:

$$p_1p_2\mathcal{R}q_1q_2 :\iff (p_1 = q_1) \text{ oppure } (p_1q_1 = 14)$$

è una relazione d'equivalenza in W.

ii) Si determinino le classi $[4]$, $[6]$, $[49]$, $[21]$, $[14]$ e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ definita da:

$$p_1p_2\mathcal{R}^*q_1q_2 :\iff (p_1 = q_1) \text{ e } (p_2 \leq q_2)$$

è una relazione d'ordine in W.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W: $A = \{9, 15, 21, 33\}$ e $B = \{4, 10, 9, 15, 14\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(A, \mathcal{R}^*)$ e $(B, \mathcal{R}^*)$ e si stabilisca se sono reticoli.

Soluzione:

i)

ii) $[4] = [6] = [14] = [49] = \{p_1p_2 \in W | p_1 = 2 \text{ oppure } p_1 = 7\}$, $[21] = \{p_1p_2 | p_1 = 3\}$. Le classi sono infinite.

iii)

iv) l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 6 e 9 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutti gli elementi del tipo p^2 con $p \in \mathbb{P}$. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo.

v) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo perchè è totalmente ordinato, $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo ad esempio non esiste $sup\{9, 14\}$.

Esercizio B.4

– *Siano $f : S \to T$ e $g : T \to W$ applicazioni; si dimostri che se gof è suriettiva, allora f è suriettiva.*

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 7\mathbb{Z} \to \frac{|x + 14|}{7} \in \mathbb{N}_0 \quad e \quad g : n \in \mathbb{N}_0 \to 7n - 14 \in 7\mathbb{Z}$$

i) si calcolino:
$f(\{0, 7, -7, -21\})$, $f(7\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 3, 5\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 1, 2, 3\})$, $g(\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{-21, -14, -35\})$, $g^{-1}(7\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte gof e fog, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive.

Soluzione:

i) a) $f(\{0, 7, -7, -21\}) = \{2, 3, 1\}$,
   b) $f(7\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$,
   c) $f^{-1}(\{0, 5, 3\}) = \{-14, 7, -35, 21, -49\}$,
   d) $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = 7\mathbb{Z}$,
   e) $g(\{0, 1, 2, 3\}) = \{-14, -7, 0, 7\}$,
   f) $g(\mathbb{N}_0) = \{z \in 7\mathbb{Z} | z \geq -14\}$,
   g) $g^{-1}(\{-35, -21, -14\}) = \{0\}$,

h) $g^{-1}(7\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$

ii) f non è iniettiva perchè ad esempio $f(-7) = 1 = f(-21)$, f è suriettiva , g è iniettiva ma non è suriettiva perchè ad esempio non esiste alcun elemento di $\mathbb{N}_0$ la cui immagine sia -21.

iii) $g \circ f : y \in 3\mathbb{Z} \to |x + 14| - 14 \in 7\mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè g non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè f non lo è)quindi non è biettiva; invece fog è l'applicazione identica di $\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa.

Esercizio B.5

– Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

Soluzione: $S = \{(-\frac{1}{7}, \frac{20}{7}, \frac{5}{7})\}$;

i) $detB = -22$, $\rho(B) = 3$;

ii) La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ \frac{5}{22} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

iii) $p(\lambda) = (-1 - \lambda)(2 - \lambda)(11 - \lambda)$, gli autovalori sono $11, -1, 2$. Gli autovettori relativi a 2 $\{(0, 3x, x)|x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a -1 $\{(0, 0, x)|x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 11 $\{(-\frac{9}{5}x, x, -\frac{11}{30}x)|x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio B.6 *Si considerino i punti A e B dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(7, 3, 0)$ e $(-1, 1, 1)$, rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB contiene l'origine del riferimento .

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $11x \equiv 9(mod 23)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(10110)_2$, $(211)_3$;

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$12 + 23 + \cdots + (11n + 1) = \frac{11n^2 + 13n}{2}$$

Soluzione:

i) La retta AB ha equazioni $x = 7 - 8t, y = 3 - 2t, z = t$;

ii) La retta non contiene l'origine.

iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[5]_{23}$

iv) 22,22.