VI Appello — Traccia A

11 settembre 2013

Nome ____________ Cognome ________________ Matricola ______________

Esercizio A.1 *Data la formula*

$$(A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$$

1. *Utilizzando le tavole di verità dire se la formula è una tautologia.*
2. *Utilizzando la tavola di verità scriverla in forma normale congiuntiva.*
3. *Tramite equivalenze logiche ridurla a forma normale congiuntiva.*

Esercizio A.2 *Si consideri la formula*

$$[\forall x(Q(x) \to P(x)) \wedge \forall x(C(x) \to \neg P(x))] \to \forall x(C(x) \to \neg Q(x)) \ .$$

i) Fissata l'interpretazione

$D =$ *esseri viventi,* $\quad P(a) \Leftrightarrow a$ *è una pianta,* $\quad Q(a) \Leftrightarrow a$ *è una quercia,* $\quad C(a) \Leftrightarrow a$ *è un cane.*

scrivere tutti i passaggi che portano all'interpretazione della formula e dire se è vera o falsa.

ii) Rinominando il minor numero possibile di variabili, trasformare la formula del primo ordine sopra in forma normale prenessa.

iii) Utilizzando il metodo degli alberi semantici ***dire*** *se la formula è una tautologia del primo ordine.*

Esercizio A.3 *Sia* $W := \{2^n 7^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ *l'insieme dei numeri naturali che sono prodotto di una potenza di* 2 *per una potenza di* 7.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$2^n 7^m \mathcal{R} 2^s 7^t :\iff n + s \in 2\mathbb{N}_0 \ \text{ e } \ m + t \in 2\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in W.

ii) Si determinino le classi [1], [2], [4], [7], [14], [28] *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo* $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ *definita da:*

$$2^n 7^m \mathcal{R}^* 2^s 7^t :\iff (n = s \ \text{ e } \ m = t) \ \text{ oppure } \ (n + m < s + t)$$

è una relazione d'ordine in W.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ *è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.*

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W: $A = \{2, 4, 7, 14, 49\}$ *e* $B = \{1, 2, 7, 49\}$ *si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati* $(A, \mathcal{R}^*)$ *e* $(B, \mathcal{R}^*)$ *e si stabilisca se sono reticoli.*

ii) $[1] = \{2^n 7^m | n, m \text{sono pari}\} = [4]$, $[2] = \{2^n 7^m | n \text{è dispari}, m \text{è pari}\}$, $[14] = \{2^n 7^m | n, m \text{sono dispari}\}$, $[7] = \{2^n 7^m | n \ \text{ è pari}, m \ \text{ è dispari}\} = [28]$. Le classi sono quattro.

iv) l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 2 e 7 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Il minimo è 1 che quindi è anche l'unico elemento minimale. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo (ad esempio non esiste in B $inf\{2, 7\}$) , $(B, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo

Esercizio A.4

– *Sia* $f : S \to T$ *una applicazione e siano* $Y_1, Y_2 \subseteq T$*; si dimostri che* $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f(Y_1) \setminus f(Y_2)$.

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : t \in 7\mathbb{Z} \to t^2 \in 49\mathbb{Z} \quad e \quad g : z \in 49\mathbb{Z} \to \frac{z}{7} \in 7\mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{-7, 0, 7, 14\})$, $f(14\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 49, -49, 98\})$, $g^{-1}(7\mathbb{Z})$, $g(\{0, 49, -98\})$, $g^{-1}(\{0, 7, 21\})$.

ii) Si stabilisca se f *e* g *sono biettive e si calcolino, in caso affermativo, le inverse.*

iii) Si determinino le applicazioni composte gof *e* fog*, si stabilisca se sono iniettive e se sono suriettive.*

i) $f(\{-7,0,7,14\}) = \{0,49,196\}$, $f(14\mathbb{Z}) = \{196y^2 | y \in \mathbb{Z}\}$, $f^{-1}(\{0,49,-49,98\}) = \{0,-7,7\}$, $g(\{0,49,-98\}) = \{0,7,-14\}$, $g^{-1}(7\mathbb{Z}) = 49\mathbb{Z}$, $g^{-1}(\{0,7,21\}) = \{0,49,147\}$,

ii) f non è iniettiva (ad esempio $f(7) = 49 = f(-7)$ e non è suriettiva (ad esempio non esiste alcun $x \in 7\mathbb{Z}$ tale che $f(x) = -49$) , g è biettiva e l'inversa è $g^{-1} : t \in 7\mathbb{Z} \to 7t \in 49\mathbb{Z}$.

iii) $gof : x \in 7\mathbb{Z} \to \frac{x^2}{7} \in 7\mathbb{Z}$, $fog : z \in 49\mathbb{Z} \to \frac{z^2}{49} \in 49\mathbb{Z}$ non sono ne' iniettive ne' suriettive.

Esercizio A.5

– Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z e t:

$$\begin{cases} x - 4y + 5z + t = 1 \\ 2y - 3z - t = 0 \\ x + 2z - 3t = 2 \end{cases}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

$S = \{(\frac{5t+4}{3}, \frac{3t+1}{2}, \frac{2t+1}{3}, t) | t \in \mathbb{R}\}$; i) $detB = 18$, $\rho(B) = 3$;

ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{19}{18} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

; iii) $p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 9\lambda - 18$, gli autovalori sono $-3, 3, -2$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(x, -\frac{x}{6}, -\frac{20x}{3}) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a 3 $\{(0, x, \frac{2}{5}x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a -2 $\{(0,0,x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio A.6 *Si considerino i punti A e B dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(3,1,1)$ e $(0,4,-7)$, rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB contiene il punto P di coordinate $(-3,7,-15)$.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $32x \equiv 7(mod 37)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(11101010)_2$, $(2342)_5$;

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che per ogni $n \geq 0$ si ha:

$$1 + 9 + 9^2 + \cdots + 9^n = \frac{9^{n+1} - 1}{8}$$

i) La retta AB ha equazioni $x = 3 - 3t, y = 1 + 3t, z = 1 - 8t$; ii) La retta contiene il punto P. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[6]_{37}$ iv) 234,347.