Matematica Discreta e Logica Matematica
CdL in Informatica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Università degli Studi di Salerno
A.A. 2008/2009
Compito d'Esame di Geometria
08/01/2009

Esercizio 1. Considerare il sistema lineare reale

$$S : \begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 + 3x_5 = 2 \\ + \sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}x_3 - \sqrt{3}x_4 - 3x_5 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x_1 + x_3 + x_4 + \sqrt{3}x_5 = 0 \\ - x_4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_5 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

e studiarne la compatibilità mediante il teorema di Rouché–Capelli. Quindi determinare nell'ordine 1) il "numero di soluzioni di S" 2) un sistema ridotto equivalente ad S, 3) l'insieme $\mathrm{Sol}(S)$ delle soluzioni di S.

Esercizio 2. Discutere la diagonalizzabilità della matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

Nel caso in cui A sia diagonalizzabile, determinare una matrice $M \in M_4(\mathbb{Q})$ invertibile, tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

Esercizio 3 (facoltativo). Sia V uno spazio vettoriale e W_1, W_2 sottospazi vettoriali di V. Dimostrare che $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio vettoriale di V.

Soluzioni

Esercizio 1. Siano A e B rispettivamente la matrice incompleta e la matrice completa del sistema S. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Il sistema S è compatibile sse $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$. Calcoliamo innanzitutto $\operatorname{rk} A$ mediante il teorema degli orlati. $\det A(1,1) = 1 \neq 0$ sicché $\operatorname{rk} A \geq 1$. L'orlato $\det A(1,1;1,1)$ del minore $\det A(1,1)$ è uguale a $\sqrt{3} \neq 0$ sicché $\operatorname{rk} A \geq 2$. Calcoliamo l'orlato

$$\det A(1,2,3;1,2,3) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si può, per esempio, usare la regola di Sarrus e si trova

$$\det A(1,2,3;1,2,3) = \sqrt{3} + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0.$$

Procediamo calcolando, di nuovo mediante la regola di Sarrus, l'orlato

$$\det A(1,2,3;1,2,4) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \neq 0.$$

Perciò $\operatorname{rk} A \geq 3$. Restano da calcolare due orlati 4×4. Il primo è

$$\det A(1,2,3,4;1,2,3,4) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e può essere calcolato applicando la regola di Laplace all'ultima riga. Otteniamo

$$\begin{aligned} \det A(1,2,3,4;1,2,3,4) &= -\det \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\det A(1,2,3;1,2,3) = 0. \end{aligned}$$

Infine

$$\det A(1,2,3,4;1,2,4,5) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

che può essere di nuovo calcolato mediante la regola di Laplace applicata all'ultima riga. Si ottiene

$$\begin{aligned}
&\det A(1,2,3,4;1,2,4,5)\\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 3 \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&= 3+3-3-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\det A(1,2,3;1,2,4) = 3-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{3} = 3-3 = 0.
\end{aligned}$$

Concludiamo che $\operatorname{rk} A = 3$ e le colonne 1, 2 e 4 (rispettivamente le righe 1, 2, 3) sono un insieme massimale di colonne (rispettivamente righe) indipendenti. Similmente $\operatorname{rk} B \geq 3$. Per calcolarlo mediate il teorema degli orlati è sufficiente calcolare il minore

$$\det B(1,2,3,4;1,2,4,6) = \det\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo nuovamente la regola di Laplace all'ultima riga ottenendo.

$$\begin{aligned}
&\det B(1,2,3,4;1,2,4,6)\\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{3}\det\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 2 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\det A(1,2,3;1,2,4)\\
&= -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sqrt{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\sqrt{3} = 0.
\end{aligned}$$

In cui, per calcolare il determinante della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo applicato la regola di Laplace all'ultima riga. Allora, $\operatorname{rk} B = 3 = \operatorname{rk} A$ e il teorema di Rouché–Capelli garantisce che il sistema S è compatibile.

1) Il sistema S ammette ∞^N soluzioni in cui $N = \sharp\{\text{incognite}\} - \operatorname{rk} A = 5 - 3 = 2$.

2) Le righe 1, 2 e 3 di B costituiscono un insieme massimale di righe indipendenti. Dunque S è equivalente al sistema

$$S' : \left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & -\sqrt{3}x_2 & +2\sqrt{3}x_3 & & +3x_5 & = & 2 \\ & +\sqrt{3}x_2 & -\sqrt{3}x_3 & -\sqrt{3}x_4 & -3x_5 & = & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x_1 & & +x_3 & +x_4 & +\sqrt{3}x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

e il sistema S' è ridotto.

3) Il sistema S' può essere risolto, per esempio, mediante il metodo di eliminazione di Gauss. Sia B' la matrice completa del sistema S'. Dunque

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo la matrice B' a gradini. Sottraiamo all'ultima riga di B' la prima moltiplicata per $\sqrt{3}/3$:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} - \tfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & -1 & 2 & 0 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Abbiamo effettuato su B' la trasformazione elementare di prima specie

$$B' \longrightarrow B'' = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Resta da sottrarre all'ultima riga di B'' la seconda divisa per $\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dunque

$$B' \longrightarrow B'' \longrightarrow B''' = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

che è a gradini. Il sistema S' è perciò equivalente al sistema a gradini

$$S''' : \begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 + 3x_5 = 2 \\ +\sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}x_3 - \sqrt{3}x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_4 + \sqrt{3}x_5 = -2\sqrt{3}/3 \end{cases}.$$

I pivot di B''' sono gli elementi di posto $(1,1)$, $(2,2)$ e $(3,4)$ che corrispondono alle incognite x_1, x_1 e x_4 rispettivamente. Le rimanenti incognite x_3 e x_5 giocano il ruolo di parametri e "possono essere portate a destra dei segni di =". Si trova così

$$\begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 = 2 - 2\sqrt{3}x_3 - 3x_5 \\ +\sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}x_4 = \sqrt{3}x_3 + 3x_5 \\ 2x_4 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}x_5 \end{cases}.$$

Dall'ultima equazione si trova

$$x_4 = -\tfrac{\sqrt{3}}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x_5$$

che, sostituita nella seconda equazione, dà

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x_5\right) = \sqrt{3}x_3 + 3x_5\\
\Longrightarrow\ &\sqrt{3}x_2 = \sqrt{3}x_3 + 3x_5 + \sqrt{3}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x_5\right)\\
\Longrightarrow\ &\sqrt{3}x_2 = \sqrt{3}x_3 + 3x_5 - 1 - \tfrac{3}{2}x_5\\
\Longrightarrow\ &\sqrt{3}x_2 = -1 + \sqrt{3}x_3 + \tfrac{3}{2}x_5\\
\Longrightarrow\ &x_2 = -\tfrac{\sqrt{3}}{3} + x_3 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}x_5
\end{aligned}$$

che, sostituita a sua volta nella prima equazione dà

$$\begin{aligned}
& x_1 - \sqrt{3}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3} + x_3 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}x_5\right) = 2 - 2\sqrt{3}x_3 - 3x_5 \\
\Longrightarrow\ & x_1 = 2 - 2\sqrt{3}x_3 - 3x_5 + \sqrt{3}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{3} + x_3 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}x_5\right) \\
\Longrightarrow\ & x_1 = 2 - 2\sqrt{3}x_3 - 3x_5 - 1 + \sqrt{3}x_3 + \tfrac{3}{2}x_5 \\
\Longrightarrow\ & x_1 = 1 - \sqrt{3}x_3 - \tfrac{3}{2}x_5
\end{aligned}\;.$$

Riassumendo

$$\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S') = \mathrm{Sol}(S''') = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}r - \frac{3}{2}s \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} + r + \frac{\sqrt{3}}{2}s \\ r \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}s \\ s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Esercizio 2. Calcoliamo, innanzitutto, il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(t) = \det(A - t\, I_4) = \det \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - t & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} - t & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4 - t & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - t \end{pmatrix}.$$

Applichiamo la regola di Laplace all'ultima riga:

$$P_A(t) = \left(-\tfrac{1}{2} - t\right) \det \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - t & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} - t & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4 - t \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il determinante della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - t & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} - t & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4 - t \end{pmatrix}$$

applichiamo la regola di Laplace alla seconda riga, sicché

$$\begin{aligned}
P_A(t) &= \left(-\tfrac{1}{2} - t\right)\left(-\tfrac{1}{2} - t\right) \det \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - t & \frac{9}{2} \\ -3 & 4 - t \end{pmatrix} \\
&= \left(-\tfrac{1}{2} - t\right)^2 \left[\left(-\tfrac{7}{2} - t\right)(4 - t) + \tfrac{27}{2}\right] \\
&= \left(-\tfrac{1}{2} - t\right)^2 \left(-14 + \tfrac{7}{2}t - 4t + t^2 + \tfrac{27}{2}\right) \\
&= \left(t + \tfrac{1}{2}\right)^2 \left(t^2 - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ora, il polinomio di secondo grado $Q(t) := t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$ ha discriminante Δ pari ha

$$\Delta = \tfrac{1}{4} + 2 = \tfrac{9}{4}.$$

Perciò $Q(t)$ ha 2 radici razionali pari a

$$\lambda_{\mp} := \frac{\frac{1}{2} \mp \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \mp \frac{3}{2}}{2},$$

da cui

$$\lambda_- = -\tfrac{1}{2}, \quad \lambda_+ = 1,$$

Da cui $Q(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)(t-1)$ e perciò

$$P_A(t) = \left(t + \tfrac{1}{2}\right)^2 \left(t + \tfrac{1}{2}\right)(t-1) = \left(t + \tfrac{1}{2}\right)^3 (t-1).$$

Allora $P_A(t)$ ha 2 radici (razionali) $\lambda_- = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_+ = 1$ di molteplicità 3 e 1 rispettivamente. Dunque gli autovalori di A sono $\lambda_- = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_+ = 1$ e hanno molteplicità algebriche a_- e a_+ pari a 3 e 1 rispettivamente. In particolare $a_- + a_+ = 4$ e per verificare la diagonalizzabilità di A è sufficiente verificare che le molteplicità geometriche g_- e g_+ di λ_- e λ_+ siano uguali ad $a_- = 3$ e $a_+ = 1$ rispettivamente. La molteplicità geometrica di λ_- è pari a

$$g_- = 4 - \mathrm{rk}(A - \lambda_-\, I_4).$$

Calcoliamo allora il rango della matrice

$$\begin{aligned} A - \lambda_-\, I_4 &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4 + \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il ranfo di $A - \lambda_-\, I_4$ è almeno 1. D'altrocanto è esattamente 1 infatti la seconda la terza e la quarta riga di $A - \lambda_-\, I_4$ dipendono dalla prima. Concludiamo che

$$g_- = 4 - 1 = 3 = a_-.$$

La molteplicità geometrica g_+ di λ_+ è almeno 1 per definizione di autovalore. D'altrocanto $g_+ \leq a_+ = 1$. Perciò $g_+ = 1 = a_+$. La matrice A è dunque diagonalizzabile. Per determinare una matrice $M \in M_4(\mathbb{Q})$ invertibile, tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale determiniamo, innanzitutto una base di autovettori di A. A questo scopo determiniamo prima una base per l'autospazio A_- relativo all'autovalore λ_-. A_- coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_- la cui matrice incompleta è $A - \lambda_-\, I_4$ e cioè

$$S_- : \begin{cases} -3x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{9}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 & = \quad 0 \\ \qquad\qquad 0 & = \quad 0 \\ -3x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{9}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 & = \quad 0 \\ \qquad\qquad 0 & = \quad 0 \end{cases}.$$

Ora, S_- è equivalente al sistema

$$S'_- : \left\{ \; -3x_1 - \tfrac{3}{4}x_2 + \tfrac{9}{2}x_3 + \tfrac{3}{2}x_4 \quad = \quad 0 \right. ,$$

da cui, banalmente,

$$\begin{aligned} & -3x_1 = \tfrac{3}{4}x_2 - \tfrac{9}{2}x_3 - \tfrac{3}{2}x_4 \\ \Longrightarrow \quad & x_1 = -\tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4. \end{aligned}$$

Dunque

$$A_- = \mathrm{Sol}(S_-) = \mathrm{Sol}(S'_-) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}r + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4.$$

Una base per A_- si può determinare sostituendo, nell'espressione per il generico elemento, ai parametri r, s, t i valori $1, 0, 0$, poi $0, 1, 0$, poi $0, 0, 1$. Troviamo così che una base per A_- è il sistema

$$\mathcal{B}_- := \left(\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Determiniamo in modo analogo una base per l'autospazio A_+ relativo all'autovalore λ_+. A_+ coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_+ la cui matrice incompleta è

$$\begin{aligned} A - \lambda_+ I_4 &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - 1 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} - 1 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 4 - 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e cioè

$$S_+ : \left\{ \begin{array}{rrrrcl} -\frac{9}{2}x_1 & -\frac{3}{4}x_2 & +\frac{9}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = & 0 \\ & -\frac{3}{2}x_2 & & & = & 0 \\ -3x_1 & -\frac{3}{4}x_2 & +3x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = & 0 \\ & & & -\frac{3}{2}x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Dalla seconda e dalla quarta equazione si ricava $x_2 = x_4 = 0$ che sostituite nella prima e nella terza equazione danno

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} -\frac{9}{2}x_1 & +\frac{9}{2}x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & +3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

da cui $x_1 = x_3$. Dunque

$$A_+ = \mathrm{Sol}(S_+) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4$$

e una base di A_+ si può determinare sostituendo, nell'espressione per il generico elemento, al parametro r il valore 1. Troviamo così che una base per A_- è il sistema che consiste di un solo elemento

$$\mathcal{B}_+ := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Concludendo il sistema

$$\mathcal{B}' := \text{“}\mathcal{B}_- \cup \mathcal{B}_+\text{”} = \left(\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

è una base di autovettori di A. Detta $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{Q}^4$ la matrice rappresentativa di f_A nella base $\mathcal{B}$ è A stessa, mentre la matrice rappresentativa di f_A nella base $\mathcal{B}'$ di autovettori è, per costruzione la matrice diagonale

$$D := \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La formula del cambiamento di base si scrive perciò

$$D = M^{-1}AM$$

in cui $M := M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ che si ottiene scrivendo in riga i vettori (colonna) della base $\mathcal{B}'$. Cioè

$$M = \begin{pmatrix} -1/4 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 (facoltativo). Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Dobbiamo dimostrare che per ogni scelta di $v, w \in W_1 \cap W_2$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha $v + w \in W_1 \cap W_2$ e $\alpha v \in W_1 \cap W_2$. Allora, siano $v, w \in W_1 \cap W_2$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. In particolare $v, w \in W_1$ e giacché W_1 è un sottospazio di V si ha $v + w \in W_1$ e $\alpha v \in W_1$. Giacché anche W_2 è un sottospazio di V, in modo del tutto analogo si ha che $v + w \in W_2$ e $\alpha v \in W_2$. Sicché $v + w \in W_1 \cap W_2$ e $\alpha v \in W_1 \cap W_2$.