Matematica Discreta e Logica Matematica
CdL in Informatica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Università degli Studi di Salerno
A.A. 2008/2009
Compito d'Esame di Geometria
16/09/2009

Esercizio 1. Dimostrare che la matrice quadrata

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

è invertibile. Quindi considerare il sistema lineare razionale

$$S : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

in cui $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ è la colonna delle incognite e $\mathbf{b} = (1, -1, 1, 1)^t$ è la colonna dei termini noti e, nell'ordine, 1) discutere il numero di soluzioni di S, 2) determinare le soluzioni di S mediante il metodo di Cramer, 3) scrivere il sistema omogeneo S_0 associato ad S, 4) discutere il numero di soluzioni di S_0, 5) determinare le soluzioni di S_0. Infine, richiamare brevemente la dimostrazione del metodo di Cramer.

Esercizio 2. Richiamare la definizione di autovalore, autovettore, diagonalizzabilità e base diagonalizzante per un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ di uno spazio vettoriale V. Quindi, dimostrare, mediante il teorema spettrale, che l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}c \\ -\frac{2}{3}a + 2b + \frac{2}{3}c \\ \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è diagonalizzabile e determinarne una base diagonalizzante.

Soluzioni

Esercizio 1. Per verificare l'invertibilità della matrice $\mathbf{A}$ è suffciente calcolarne il determinante:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Per esempio, si può applicare la regola di Laplace sviluppando rispetto all'ultima riga:

$$\det \mathbf{A} = \tfrac{1}{2} \det \mathbf{A}(1,2,3;1,2,3).$$

Ora

$$\det \mathbf{A}(1,2,3;1,2,3) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

che si può calcolare, per esempio, mediante la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} &= 0 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - 0 - 0 - 0 \\ &= -\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Concludendo

$$\det \mathbf{A} = \tfrac{1}{2} \det \mathbf{A}(1,2,3;1,2,3) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{1}{8} \neq 0.$$

$\mathbf{A}$ è, perciò, invertibile. Il sistema S si scrive

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccc} & -x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & & -x_3 & & = & -1 \\ -\frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & & & = & 1 \\ & & & \frac{1}{2}x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

e, essendo un sistema quadrato con matrice dei coefficienti invertibile, ammette un'unica soluzione data da

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

Per determinare $\mathbf{x}_0$ dobbiamo, perciò, determinare, innanzitutto, $\mathbf{A}^{-1}$. Ora,

$$\mathbf{A}^{-1} = \tfrac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{A}^*)^t,$$

in cui $\mathbf{A}^* =: (a^*_{ij})$ è la matrice reciproca di $\mathbf{A}$ il cui elemento di posto ij, a^*_{ij}, è il complemento algebrico dell'elemento di posto ij della matrice $\mathbf{A}$. Allora,

$$a^*_{11} = (-)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

in cui

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

è stato calcolato, banalmente, applicando la regola di Laplace all'ultima riga. Similmente

$$a_{12}^* = (-)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4},$$

$$a_{13}^* = (-)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$

$$a_{14}^* = (-)^{1+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

infatti la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha una riga nulla. Gli altri elementi della matrice $\mathbf{A}^*$ si calcolano banalmente in modo del tutto analogo. Troviamo così,

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1} &= \tfrac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{A}^*)^t \\
&= \tfrac{1}{-1/8} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^t \\
&= -8 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Infine,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2+1-4+4 \\ -2+1-2+4 \\ -2+2-4+4 \\ 0+0+0+2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Il sistema omogeneo S_0 associato ad S è

$$S_0 : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0,$$

cioè

$$S_0 : \left\{ \begin{array}{ccccc} & -x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & & = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & & & = 0 \\ & & & \frac{1}{2}x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

ed essendo un sistema omogeneo, quadrato, con matrice dei coefficienti invertibile ammette come unica soluzione la soluzione banale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il metodo di Cramer nella forma usata sopra si dimostra banalmente come segue. Sia $S : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, un sistema lineare quadrato di n equazioni in n incognite sul campo $\Bbbk = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{A} \in M_n(\Bbbk)$ una matrice invertibile. Allora $\mathbf{x}_0 \in \Bbbk^n$ è soluzione di S sse

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$$

(in cui il punto "$\cdot$" indica, come al solito, il prodotto righe per colonne), il che avviene sse

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \\
\iff & (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \\
\iff & \mathbb{I}_n \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \\
\iff & \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V su $\Bbbk = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Uno scalare $\lambda \in \Bbbk$ è un autovalore di f sse, per definizione, esiste un vettore $v \in V$ diverso dal vettore nullo tale che

$$f(v) = \lambda v.$$

In questo caso, v è, per definizione, un autovettore di f. f si dice diagonalizzabile sse, per definizione, esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che la matrice rappresentativa di f in $\mathcal{B}$ è diagonale. Una tale base si dice base diagonalizzante per f. In pratica, una base diagonalizzate per f è una base di V composta di autovettori di f.

Ora, sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ come nel testo dell'esercizio. La matrice rappresentativa di f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A_f = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è perciò

$$\begin{aligned} P_f(t) = \det(A_f - t\, I_3) &= \det \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - t & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 2 - t & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} - t \end{pmatrix} \\ &= \left(\tfrac{4}{3} - t\right)(2 - t)\left(\tfrac{2}{3} - t\right) + 0 + 0 - \tfrac{2}{3}(2 - t)\tfrac{4}{3} + 0 + 0 \\ &= (2 - t)\left[\left(\tfrac{4}{3} - t\right)\left(\tfrac{2}{3} - t\right) - \tfrac{8}{9}\right] \\ &= (2 - t)\left(\tfrac{8}{9} - 2t + t^2 - \tfrac{8}{9}\right) \\ &= (2 - t)(-t)(2 - t) \\ &= -t(2 - t)^2. \end{aligned}$$

Concludiamo che $P_f(t)$ ha 2 radici reali, 0 e 2, di molteplicità 1 e 2 rispettivamente. Dunque gli autovalori di f sono $\lambda_1 := 0$ e $\lambda_2 := 2$ e hanno molteplicità algebriche a_1 e a_2 pari a 1 e 2 rispettivamente. In particolare $a_1 + a_2 = 3$ e per verificare la diagonalizzabilità di f è sufficiente verificare che le molteplicità geometriche g_1 e g_2 di λ_1 e λ_2 siano uguali ad a_1 e a_2 rispettivamente. Ora, g_1 è almeno 1 per definizione di autovalore. D'altrocanto $g_1 \leq a_1 = 1$. Perciò $g_1 = 1$. g_2 è la dimensione dell'autospazio V_2 relativo all'autovalore $\lambda_2 = -1$ che coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_2 la cui matrice incompleta è

$$A_f - \lambda_2\, I_3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \lambda_2 & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 2 - \lambda_2 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

e cioè

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{rrcl} -\frac{2}{3}x_1 & +\frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ -\frac{2}{3}x_1 & +\frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ \frac{4}{3}x_1 & -\frac{4}{3}x_3 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

Evidentemente, il rango di $A_f - \lambda_2 I_3$ è 1. Di conseguenza la dimensione di $\mathrm{Sol}(S_2)$ è $g_2 = 3 - 1 = 2 = a_2$. Concludiamo che f è diagonalizzabile.

Per determinare una base diagonalizzante di f, determiniamo, innanzitutto, una base per l'autospazio V_1 relativo all'autovalore λ_1. V_1 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_1 la cui matrice incompleta è $A - \lambda_1\, I_3 = A$ e cioè

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rrrcl} \frac{4}{3}x_1 & 0 & +\frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ -\frac{2}{3}x_1 & +2x_2 & +\frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ \frac{4}{3}x_1 & & +\frac{2}{3}x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

La prima e l'ultima equazione coincidono e le prime due sono indipendenti, perciò S_1 è equivalente al sistema ridotto

$$S_1' : \left\{ \begin{array}{rrrcl} \frac{4}{3}x_1 & 0 & +\frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ -\frac{2}{3}x_1 & +2x_2 & +\frac{2}{3}x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Aggiungendo alla seconda equazione la prima divisa per due troviamo il sistema equivalente

$$S_2' : \begin{cases} \frac{4}{3}x_1 & 0 & +\frac{2}{3}x_3 & = & 0 \\ & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \end{cases} .$$

Dunque, x_3 gioca il ruolo di parametro e può "essere portato a destra del segno di =". Concludiamo che

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}x_3,$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{2}x_3,$$

cioè

$$V_1 = \mathrm{Sol}(S_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ed una sua base $\mathcal{B}_1$ si trova sostituendo al parametro s il valore 1:

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Determiniamo ora una base per l'autospazio V_2 relativo all'autovalore λ_2. Come già osservato V_2 coincide con lo spazio $\mathrm{Sol}(S_2)$ delle soluzioni del sistema omogeneo S_2 che è banalmente equivalente al sistema ridotto

$$S_2' : \{x_1 - x_3 = 0$$

da cui

$$x_1 = x_3.$$

Concludiamo che, per esempio, x_3 e x_2 giocano il ruolo di parametri e

$$V_2 = \mathrm{Sol}(S_2) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Una base di V_2 si trova sostituendo ai parametri s, t i valori $1, 0$ e $0, 1$:

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Concludendo il sistema di vettori

$$\mathcal{B} := \text{“}\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2\text{”} = \left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base diagonalizzante per f.