Matematica Discreta e Logica Matematica
CdL in Informatica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Università degli Studi di Salerno
A.A. 2008/2009
Compito d'Esame di Geometria
20/02/2009

Esercizio 1. Si consideri il sistema reale

$$S : \begin{cases} \sqrt{2}x & -\frac{\sqrt{2}}{2}y & & = & 0 \\ -x & & +\sqrt{2}z & = & 0 \\ x & -y & +\sqrt{2}z & = & 0 \\ & y & +\frac{\sqrt{2}}{2}z & = & -\frac{1}{2} \\ -2x & +\frac{1}{2}y & +\sqrt{2}z & = & 0 \end{cases} .$$

Quindi nell'ordine
1) si dimostri, mediante il teorema di Rouché–Capelli, che S è compatibile,
2) si dimostri che S è equivalente ad un sistema ridotto, quadrato, S',
3) si determini l'insieme $\mathrm{Sol}(S)$ delle soluzioni di S, risolvendo S' mediante il metodo di Cramer.

Esercizio 2. Si dimostri, mediante il teorema spettrale, che la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Q})$$

non è diagonalizzabile, determinando nell'ordine
1) gli autovalori di A e le relative molteplicità (algebriche e geometriche),
2) gli autospazi di A,
3) un sistema massimale di autovettori indipendenti.

Esercizio 3 (facoltativo). Si considerino gli spazi vettoriali $M_{n,m}(\mathbb{K})$ e $M_{n,m'}(\mathbb{K})$ delle matrici di ordine $n \times m$ e $n \times m'$ su $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $n, m, m' \in \mathbb{N}$, e una matrice $B \in M_{m,m'}(\mathbb{K})$. Si dimostri che l'applicazione

$$\varphi_B : M_{n,m}(\mathbb{K}) \ni A \longmapsto \varphi_B(A) := A \cdot B \in M_{n,m'}(\mathbb{K}),$$

in cui il punto "$\cdot$" indica il prodotto righe per colonne, è lineare.

Soluzioni

Esercizio 1. Siano A e B rispettivamente la matrice incompleta e la matrice completa del sistema S. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema S è compatibile sse $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$. Calcoliamo innanzitutto $\operatorname{rk} A$ mediante il teorema degli orlati. $\det A(1,1) = 1 \neq 0$ sicché $\operatorname{rk} A \geq 1$. L'orlato $\det A(1,1;1,1)$ del minore $\det A(1,1)$ è uguale a $-\sqrt{2}/2 \neq 0$ sicché $\operatorname{rk} A \geq 2$. Calcoliamo l'orlato

$$\det A(1,2,3;1,2,3) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si può, per esempio, applicare la regola di Sarrus e si trova

$$\det A(1,2,3;1,2,3) = -1 + 2 - 1 = 0.$$

Calcoliamo dunque l'orlato

$$\det A(1,2,4;1,2,3) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

di nuovo mediante la regola di Sarrus:

$$\det A(1,2,4;1,2,3) = -2 - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{5}{2} \neq 0.$$

Dunque $\operatorname{rk} A = 3$ e le righe 1, 2 e 4 di A costituiscono un sistema massimale di righe indipendenti.

Similmente $\operatorname{rk} B \geq 3$. Per calcolarlo mediate il teorema degli orlati calcoliamo il minore

$$\det B(1,2,3,4;1,2,3,4) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Applicando la regola di Laplace all'ultima colonna otteniamo

$$\begin{aligned} \det B(1,2,3,4;1,2,3,4) &= -\tfrac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= -\tfrac{1}{2} \det A(1,2,3;1,2,3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Resta da calcolare il minore

$$\det B(1,2,4,5;1,2,3,4) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Applicando nuovamente la regola di Laplace all'ultima colonna otteniamo

$$\det B(1,2,4,5;1,2,3,4) = \tfrac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

può essere calcolato, per esempio, mediante la regola di Sarrus:

$$\det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0$$

Allora, $\operatorname{rk} B = 3 = \operatorname{rk} A$ e dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema S è compatibile. Ora, analogamente a quanto sopra, le righe 1, 2 e 4 di B costituiscono un insieme massimale di righe indipendenti. Dunque S è equivalente al sistema quadrato

$$S' : \begin{cases} \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 0 \\ -x + \sqrt{2}z = 0 \\ y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

S' è ridotto e può essere risolto mediante il metodo di Cramer e dunque S ammette un'unica soluzione. Detta A' la matrice dei coefficienti di S' si ha

$$A' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice reciproca è

$$A'^* = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ -1 & -2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

e la trasposta

$$\left(A'^*\right)^t = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -2 \\ -1 & -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A' è

$$\det A' = \det A(1,2,4;1,2,3) = -\tfrac{5}{2},$$

sicché l'inversa di A' è

$$A'^{-1} = \tfrac{1}{\det A}\left(A'^{*}\right)^{t} = -\tfrac{2}{5}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -2 \\ -1 & -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{5} \end{pmatrix}.$$

Finalmente la soluzione di S', e quindi di S è

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A'^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico di A è:

$$P_A(t) = \det(A - t\,I_5) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}.$$

Applichiamo la regola di Laplace all'ultima riga:

$$P_A(t) = -t\det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante della matrice 4×4

$$\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t \end{pmatrix}$$

applichiamo la regola di Laplace alla terza riga:

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t \end{pmatrix} \\ &= (1-t)\det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Infine, per calcolare il determinante della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t \end{pmatrix}$$

applichiamo la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t \end{pmatrix} &= (1-t)\left(\tfrac{1}{2}-t\right)^2 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}(1-t) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}-t\right) \\ &= -t^3 + 2t^2 - t \\ &= -t\left(t^2 - 2t + 1\right) \\ &= -t\,(t-1)^2 . \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$P_A(t) = -t^2\,(t-1)^3$$

che ha 2 radici razionali, 0 e 1, di molteplicità 2 e 3 rispettivamente. Dunque gli autovalori di A sono $\lambda_0 := 0$ e $\lambda_1 := 1$ e hanno molteplicità algebriche $a_0 := 2$ e $a_1 := 3$ rispettivamente. In particolare $a_0 + a_1 = 5$ e per verificare che A non è diagonalizzabile è necessario calcolare le molteplicità geometriche g_0 e g_1 di λ_0 e λ_1 rispettivamente. La molteplicità geometrica di λ_0 è pari a

$$g_0 = 5 - \operatorname{rk}(A - \lambda_0\, I_5) = 5 - \operatorname{rk} A.$$

Calcoliamo $\operatorname{rk} A$ mediante il teorema degli orlati. Le colonne 2 e 5 sono proporzionali alla colonna 1 e pertanto possono essere escluse dal conto. Similmente l'ultima riga è nulla e può essere esclusa dal conto. Il rango di A è allora uguale al rango della sottomatrice

$$B := A\,(1,2,3,4;1,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ora $\det B(1;1) = 1 \neq 0$, perciò $\operatorname{rk} B \geq 1$. Inoltre, $\det B(1,2;1,2) = -1 \neq 0$, perciò $\operatorname{rk} B \geq 2$. Calcoliamo ora

$$\det B\,(1,2,3;1,2,3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Applicando la regola di Laplace all'ultima riga si trova

$$\det B\,(1,2,3;1,2,3) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \neq 0.$$

Concludiamo che

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 3$$

e le righe 1, 2 e 3 di A costituiscono un sistema massimale di righe indipendenti. In particolare $g_0 = 5 - 3 = 2 = a_0$. Dobbiamo allora calcolare

$$g_1 = 5 - \operatorname{rk}(A - \lambda_1\, I_5).$$

Calcoliamo $\mathrm{rk}(A - \lambda_1 I_5)$ mediante il teorema degli orlati. Innanzitutto

$$
\begin{aligned}
A - \lambda_1 I_5 &= \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La colonna 3 di $A - \lambda_1 I_5$ è uguale alla 2 e la colonna 4 è uguale alla 1, possono pertanto essere escluse dal conto. Similmente, la riga 3 di $A - \lambda_1 I_5$ è nulla e può essere esclusa dal conto. Il rango di $A - \lambda_1 I_5$ è allora uguale al rango della sottomatrice

$$
B_1 := (A - \lambda_1 I_5)\,(1,2,3,4;1,2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Ora $\det B_1(1;2) = 1 \neq 0$, perciò $\mathrm{rk}\, B_1 \geq 1$. Inoltre, $\det B_1(1,2;1,2) = -1/2 \neq 0$, perciò $\mathrm{rk}\, B_1 \geq 2$. Calcoliamo ora

$$
\det B_1\,(1,2,4;1,2,3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Applicando la regola di Laplace all'ultima riga si trova

$$
\det B_1\,(1,2,4;1,2,3) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \neq 0.
$$

Concludiamo che

$$
\mathrm{rk}\,(A - \lambda_1 I_5) = \mathrm{rk}\, B_1 = 3
$$

e le righe 1, 2 e 4 di $(A - \lambda_1 I_5)$ costituiscono un sistema massimale di righe indipendenti. In particolare $g_1 = 5 - 3 = 2 \neq a_1$. Dunque, la matrice A non è diagonalizzabile.

Determiniamo gli autospazi di A. L'autospazio A_0 relativo all'autovalore λ_0 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_0 la cui matrice incompleta è $A - \lambda_0 I_5 = A$ e cioè

$$
S_0 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.
$$

S_0 è ovviamente equivalente al sistema

$$
S_0' : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \end{cases}.
$$

che può essere risolto, per esempio, mediante il metodo di eliminazione di Gauss. La matrice dei coefficienti di S_0' è

$$A_0' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Riduciamo a gradini A_0'. Sottraendo alla seconda e alla quarta riga la prima divisa per due otteniamo

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

rispettivamente. Abbiamo effettuato la trasformazione

$$A_0' \longrightarrow A_0'' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

che non è ancora a gradini. Aggiungendo alla terza riga la seconda

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque

$$A_0' \longrightarrow A_0'' \longrightarrow A_0''' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A_0'''' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che il sistema S_0 è equivalente al sistema (ridotto) a gradini

$$S_0'''' : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione ricaviamo $x_4 = 0$ che sostituita nella seconda dà $x_3 = 0$. Sostituendo nella prima equazione troviamo

$$x_1 = -x_2 + x_5.$$

Concludiamo che

$$A_0 = \mathrm{Sol}(S_0) = \mathrm{Sol}(S_0') = \mathrm{Sol}(S_0'''') = \left\{ \begin{pmatrix} -s+t \\ s \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^5.$$

Una base per A_0 si può determinare sostituendo, nell'espressione per il generico elemento, ai parametri s, t i valori $1, 0$, e poi $0, 1$. Troviamo così che una base per A_0 è il sistema

$$\mathcal{B}_0 := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Determiniamo in modo analogo l'autospazio A_1 relativo all'autovalore λ_1. A_1 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_1 la cui matrice incompleta è $A - \lambda_1 I_5$ e cioè

$$S_1 : \begin{cases} & x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 & = & 0 \\ & & & & -x_5 & = & 0 \end{cases},$$

che è ovviamente equivalente al sistema

$$S_1' : \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 & = & 0 \\ & & & & -x_5 & = & 0 \end{cases},$$

in cui abbiamo scambiato le prime due equazioni (oltre che eliminare la terza, che è banale). S_1' può essere risolto, per esempio, con il metodo di eliminazione di Gauss. La matrice dei coefficienti di S_1' è

$$A_1' := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo A_1' a gradini. Sottraendo alla terza riga la prima troviamo

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Abbiamo effettuato la trasformazione

$$A_1' \longrightarrow A_1'' := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che non è ancora a gradini. Sottraendo alla terza riga la seconda troviamo

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cioè

$$A_1' \longrightarrow A_1'' \longrightarrow A_1''' := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_1'''' := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che S_1', e quindi S_1, è equivalente al sistema

$$S_1'''': \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & 0 & -x_5 & = & 0 \\ & & & & x_5 & = & 0 \end{cases}.$$

I pivot di A_1'''' sono gli elementi di posto 11, 22 e 35 che corrispondono alle incognite x_1, x_2 e x_5. Le rimanenti incognite x_3 e x_4 giocano il ruolo di parametri e "possono essere portati a destra del segno di =". Si trova così

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_5 & = & \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ & x_2 & -x_5 & = & -x_3 \\ & & x_5 & = & 0 \end{cases}.$$

Sostituendo l'ultima equazione nella terza troviamo

$$x_2 = -x_3$$

e sostituendo nella prima troviamo

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}x_1 = -\tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 \\ \Longrightarrow \quad & x_1 = x_4. \end{aligned}$$

Concludendo

$$A_1 = \mathrm{Sol}(S_1) = \mathrm{Sol}(S_1') = \mathrm{Sol}(S_1'''') = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -s \\ s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4$$

Una base per A_1 si può determinare sostituendo, nell'espressione per il generico elemento, ai parametri s, t i valori $1, 0$, e poi $0, 1$. Troviamo così che una base per A_1 è il sistema

$$\mathcal{B}_1 := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Un sistema massimale di autovettori indipendenti è senz'altro "l'unione" dei sistemi $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$:

$$\mathcal{S} := \text{“}\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1\text{”} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Esercizio 3 (facoltativo). Siano $A, A' \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \varphi_B(A + A') &= (A + A') \cdot B \\ &= A \cdot B + A' \cdot B \\ &= \varphi_B(A) + \varphi_B(A'), \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato la proprietà distributiva del prodotto righe per colonne rispetto all'addizione di matrici. Similmente

$$\begin{aligned}\varphi_B(\alpha A) &= (\alpha A) \cdot B \\ &= \alpha(A \cdot B) \\ &= \alpha\varphi_B(A),\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato la compatibilità del prodotto righe per colonne con il prodotto di una matrice per uno scalare. Concludiamo che φ_B è un'applicazione lineare.