Esame di Matematica Discreta e Logica Matematica.
Prova scritta del 06 febbraio 2012
Compito A

Cognome e Nome .... Matricola ....

1) Sia φ la seguente formula:

$$(x \to y) \wedge ((y \to z) \to x).$$

(i) Scrivere la tavola di verità di φ, dire se è soddisfacibile e, in caso affermativo, specificare le valutazioni delle variabili che la soddisfano.

(ii) Utilizzando la tavola di verità, scrivere una formula in CNF o in DNF equivalente a φ.

(iii) Trasformare φ in CNF o in DNF mediante equivalenze logiche.

Cognome e Nome .... Matricola ....

2 Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (10)$ una valutazione della variabile v_1. Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come "a è un numero primo";

$P_2(a)$ interpretato come "a è un numero pari";

$P_3(a, b)$ interpretato come "a divide b".

Interpretare, nel dominio $\mathbb{N}$, mediante la valutazione e le interpretazioni assegnate, le seguenti formule e dire se sono vere o false motivando la risposta.

(*i*) $\mathbb{N} \models_x \forall v((P_2(v) \wedge P_3(v, v_1)) \to P_1(v))$.

(*ii*) $\mathbb{N} \models_x \exists v((P_2(v) \wedge P_3(v, v_1)) \to P_1(v))$.

Cognome e Nome . . . . Matricola . . . .

3) Si risolva in $\mathbb{Z}$ il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 4 \\ x \equiv -3 \mod 7 \\ x \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

Cognome e Nome .... Matricola ....

4) Si consideri la relazione R sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi definita, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se } a = b \text{ oppure } ab = 36.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Determinare

i) $[0]_R =$

ii) $[18]_R =$

iii) $[2]_R =$

iv) $[36]_R =$

Stabilire, infine, se è compatibile con l'addizione e con la moltiplicazione in $\mathbb{Z}$.

Cognome e Nome .... Matricola ....

5) Si dimostri per induzione su n che:

$$n! \geq 2^{n-1}$$

per ogni $n \geq 1$ Si calcoli, inoltre, il $MCD(441, 21)$ mediante l'algoritmo euclideo delle divisioni successive.

Cognome e Nome .... Matricola ....

6) Considerare l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x & +2y & +z & +3w \\ x & +y & -z & +w \\ -4x & -y & +4z & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare la dimensione e un base di $\ker f$.

Cognome e Nome .... Matricola ....

7) Dimostrare che la matrice razionale

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} & -3 & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e determinarne una base diagonalizzante.

Cognome e Nome . . . . Matricola . . . .

8) Dopo aver richiamato la definizione di base e di dimensione di uno spazio vettoriale, dimostrare che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base di $\mathbb{R}^2$.