Matematica Discreta e Logica Matematica
Cl. 2 (matr. congrua 1 mod 3)
A.A. 2011/2012

Appello del 17 Gennaio 2012
Compito A

Cognome e Nome .... Matricola ....

1) Sia φ la seguente formula:

$$((\neg x \wedge \neg y) \vee z) \rightarrow (x \wedge \neg y).$$

(i) Scrivere la tavola di verità di φ, dire se è soddisfacibile e, in caso affermativo, specificare le valutazioni delle variabili che la soddisfano.

(ii) Utilizzando la tavola di verità, scrivere una formula in CNF o in DNF equivalente a φ.

(iii) Trasformare φ in CNF o in DNF mediante equivalenze logiche.

Cognome e Nome .... Matricola ....

2) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (2, 11)$ una valutazione delle variabili v_1, v_2. Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come "a è primo";

$P_2(a, b)$ interpretato come "a è potenza di b";

$P_3(a, b)$ interpretato come "$a \geq b$".

Interpretare, nel dominio $\mathbb{N}$, mediante la valutazione e le interpretazioni assegnate, le seguenti formule e dire se sono vere o false motivando la risposta.

(i) $\forall v(P_1(v) \to (\neg P_2(v, v_1)) \vee P_3(v, v_2))$.

(ii) $\exists v(P_1(v) \to (\neg P_2(v, v_1)) \vee P_3(v, v_2))$.

Cognome e Nome . . . . Matricola . . . .

3) Si risolva in $\mathbb{Z}$ la seguente equazione congruenziale

$$12x \equiv 21 \qquad \mod 81$$

Cognome e Nome .... Matricola ....

4) Si consideri la relazione R sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi definita, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, da

$$aRb \quad \text{se e solo se esiste } k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = y + 9k.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Determinare

i) $[0]_R =$

ii) $[1]_R =$

iii) $[10]_R =$

iv) $[81]_R =$

Stabilire, infine, se è compatibile con l'addizione e con la moltiplicazione in $\mathbb{Z}$.

Cognome e Nome .... Matricola ....

5) Si consideri la seguente funzione

$$f : x \in \mathbb{Q} \to x^2 + 3x - 10 \in \mathbb{Q}.$$

Si determini

i) $f(\{-5, -3, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\})$

ii) $f^{-1}(\{-10, 0, \frac{2}{3}, 4, 8\})$

Si stabilisca se f è iniettiva o suriettiva.

Cognome e Nome .... Matricola ....

6) Considerare il sistema lineare reale

$$S : \begin{cases} \sqrt{3}x & -y & +2\sqrt{3}z & = & 0 \\ x & -\sqrt{3}y & -z & = & \sqrt{3} \\ -x & +\sqrt{3}y & +2z & = & -2\sqrt{3} \end{cases} .$$

Dopo aver verificato che può essere risolto con il metodo di Cramer, applicare tale metodo.

Cognome e Nome .... Matricola ....

7) Dimostrare che la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile e determinare un sistema massimale di autovettori di A.

Cognome e Nome .... Matricola ....

8) Dopo aver richiamato la definizione di sottospazio vettoriale, dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite, $\{A \cdot x = \mathbb{O},\ A \in M_{m,n}(\Bbbk)$, è un sottospazio vettoriale di $\Bbbk^n$.