

Matematica Discreta e Logica Matematica
Cl. 2 (matr. congrua 1 mod 3)
A.A. 2011/2012

Appello del 17 Gennaio 2012
Compito B

Cognome e Nome Matricola

1) Sia φ la seguente formula:

$$((x \wedge y) \vee \neg z) \rightarrow (\neg x \wedge y).$$

- (i) Scrivere la tavola di verità di φ , dire se è soddisfacibile e, in caso affermativo, specificare le valutazioni delle variabili che la soddisfano.
- (ii) Utilizzando la tavola di verità, scrivere una formula in CNF o in DNF equivalente a φ .
- (iii) Trasformare φ in CNF o in DNF mediante equivalenze logiche.

Cognome e Nome Matricola

2 Sia \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (7, 3)$ una valutazione delle variabili v_1, v_2 . Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come “ a è primo”;

$P_2(a, b)$ interpretato come “ a è potenza di b ”;

$P_3(a, b)$ interpretato come “ $a \geq b$ ”.

Interpretare, nel dominio \mathbb{N} , mediante la valutazione e le interpretazioni assegnate, le seguenti formule e dire se sono vere o false motivando la risposta.

(i) $\forall v(P_1(v) \rightarrow (\neg P_2(v, v_1)) \vee P_3(v, v_2))$.

(ii) $\exists v(P_1(v) \rightarrow (\neg P_2(v, v_1)) \vee P_3(v, v_2))$.

Cognome e Nome Matricola

3) Si risolva in \mathbb{Z} la seguente equazione congruenziale

$$15x \equiv 24 \pmod{81}$$

Cognome e Nome Matricola

- 4) Si consideri la relazione R sull'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi relativi definita, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, da

$$aRb \text{ se e solo se esiste } k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x = y + 11k.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Determinare

i) $[0]_R =$

ii) $[1]_R =$

iii) $[12]_R =$

iv) $[22]_R =$

Stabilire, infine, se è compatibile con l'addizione e con la moltiplicazione in \mathbb{Z} .

Cognome e Nome Matricola

5) Si consideri la seguente funzione

$$f : x \in \mathbb{Q} \rightarrow x^2 - 5x + 4 \in \mathbb{Q}.$$

Si determini

i) $f(\{-2, -\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{8}, 4, 7\})$

ii) $f^{-1}(\{-2, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 18\})$

Si stabilisca se f è iniettiva o suriettiva.

Cognome e Nome Matricola

6) Considerare il sistema lineare reale

$$S : \begin{cases} -2y + z - 2w = 1 \\ x - y - 3z + w = 1 \\ -x + y + 2z - w = 1 \end{cases}$$

e risolverlo con il metodo di Gauss.

Cognome e Nome Matricola

7) Dimostrare che l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & +y & \\ x & & +z \\ & y & +z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è diagonalizzabile e determinarne una base diagonalizzante.

Cognome e Nome Matricola

- 8) Dopo aver richiamato la definizione di base di uno spazio vettoriale, dimostrare che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

formano una base di \mathbb{Q}^3 .